ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА МАТЕМАТИКА

1. Коля придумал себе развлечение: он переставляет цифры в числе 2015, после чего ставит между любыми двумя цифрами знак умножения и вычисляет значение получившегося выражения. Например: $150 \cdot 2 = 300$, или $10 \cdot 25 = 250$. Какое наибольшее число у него может получиться в результате такого вычисления?

Ответ. 1050

Решение. Заметим три факта (обоснование их очевидно). Во-первых, при максимальном произведении в каждом из сомножителей цифры идут в порядке убывания. Т.е. 0 должен стоять в конце одного из сомножителей. Во вторых, без разницы, в конце какого из двух сомножителей поставить 0, произведение от этого не изменится. Поэтому можно переставить его так, чтобы оба сомножителя стали двузначными. После этого остаётся перебрать 3 варианта:

$$21 \cdot 50 = 1050, \qquad 52 \cdot 10 = 520, \qquad 51 \cdot 20 = 1020.$$

Критерии.

(−)

(−.) Правильный ответ с примером. Не объяснено, почему он правильный.

(−/+) Пропущено существенное число случаев

(+/2) Написано, что рассматривать можно только половину случаев (например, случай трёхзначного и однозначного числа), но объяснение неудовлетворительно

(+/−) Пропущено 1-2 случая

(+.)

(+) Правильный ответ с разбором всех случаев.

2. Числа x и y таковы, что $x + y = xy = 17$. Найти значение выражения:

$$\left(x^2 - 17x\right)\left(y + \frac{17}{y}\right).$$

Ответ. -289

Решение. $x - 17 = -y$, $\frac{17}{y} = x$. Искомое выражение равно:

$$x(x-17)(y+x) = -xy \cdot 17 = -289.$$

Критерии.

(−)

(−.)

(−/+) Серьёзная арифметическая ошибка, влияющая на ход решения, или несколько арифметических ошибок.

(+/2)

(+/−) Одна арифметическая ошибка при в целом правильном решении.

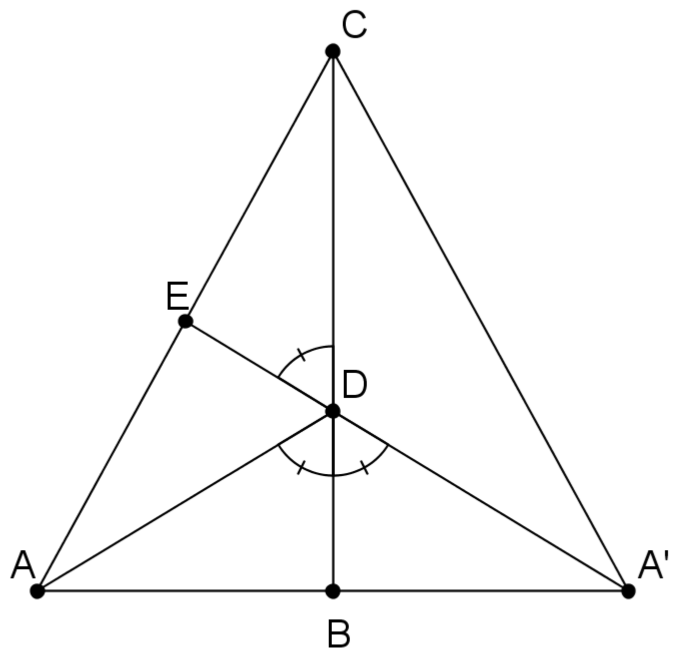
(+.) Пропуск незначительных выкладок.

(+)

3. Дан треугольник ABC, $\angle B = 90^\circ$. На сторонах AC, BC выбраны точки E и D соответственно, такие, что $AE = EC$, $\angle ADB = \angle EDC$. Найти отношение $CD : BD$.

Ответ. $2 : 1$

Решение. Построим треугольник $A'BC$, симметричный данному относительно стороны BC. Точки A', D, E лежат на одной прямой, т.к. $\angle A'DB = \angle EDC$. Следовательно D — точка пересечения медиан $A'E$ и CB треугольника $AA'C$, и делит их в отношении $2 : 1$ считая от вершины.



Критерии.

(−.) Рассмотрен частный случай, где получен правильный ответ, но в решении было получено, что в треугольнике угол равен 30. Либо в решении было получено подобие, где при нахождении коэффициента получался правильный ответ.

(−/+) Получен правильный ответ, но в решении не доказано, почему K=2 и отсутствуют подобия, в котором этот коэффициент мог быть найден.

(+/2) Получен правильный ответ, но в решении присутствуют соотношения, которые используются в решении, но не доказано почему.

(+/−) Получен правильный ответ, показано из какого подобия выходит нужный коэффициент подобия, но не сказано почему (т.е. из решения видно почему это так, но нет ссылки на это в доказательстве). Либо не получен ответ, но по решению видно, что можно получить нужный коэффициент, чтобы вывести правильный ответ, но почему-то это сделано не было.

(+.) Арифметическая ошибка при правильном решении, которая привела к неправильному ответу. Либо получен правильный ответ, но в решении встречаются ошибки в обозначениях, из-за которых решение становится не ясным.

4. В стране Лумумбу есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты ($\mathcal{E}$) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов а один кокос - на $1/15$ доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \leftrightarrows \mathcal{E}$ и $\$ \leftrightarrows$Б в Лумумбу запрещены.

Перевозить деньги через границу Лумумбу можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лумумбу, имея при себе 100 долларов. Он может менять любую валюту на любую другую неограниченное количество раз. Может ли он разбогатеть и увезти из Лумумбу 200 долларов, используя только операции обмена валют? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

Решение. Рассмотрим цикл К$\to$ $\mathcal{E}$ $\to$ Б $\to$ К. Этот цикл позволяет увеличивать количество имеющейся валюты. Действительно, если изначально было 11 кокосов, то они обмениваются на 1 енота, который в свою очередь обменивается на 6 бананов, которые обмениваются на 12 кокосов. Таким образом, из 11 кокосов получается 12 кокосов.

Будем каждый раз запускать по такому циклу ровно 11 кокосов, т.е. прибыльный 12-й кокос будем каждый раз откладывать. Тогда, сделав n циклов, мы можем заработать ровно n кокосов. Теперь стратегия например такова: обмениваем 100\$ на 1000 кокосов, берём 11 из этой 1000 и производим n раз цикл, в результате получаем $1000+n$ кокосов. Если $n \geq 2000$, то в результате получим $\geq$3000 кокосов, которые обменяем обратно на $\geq$200\$.

Критерии.

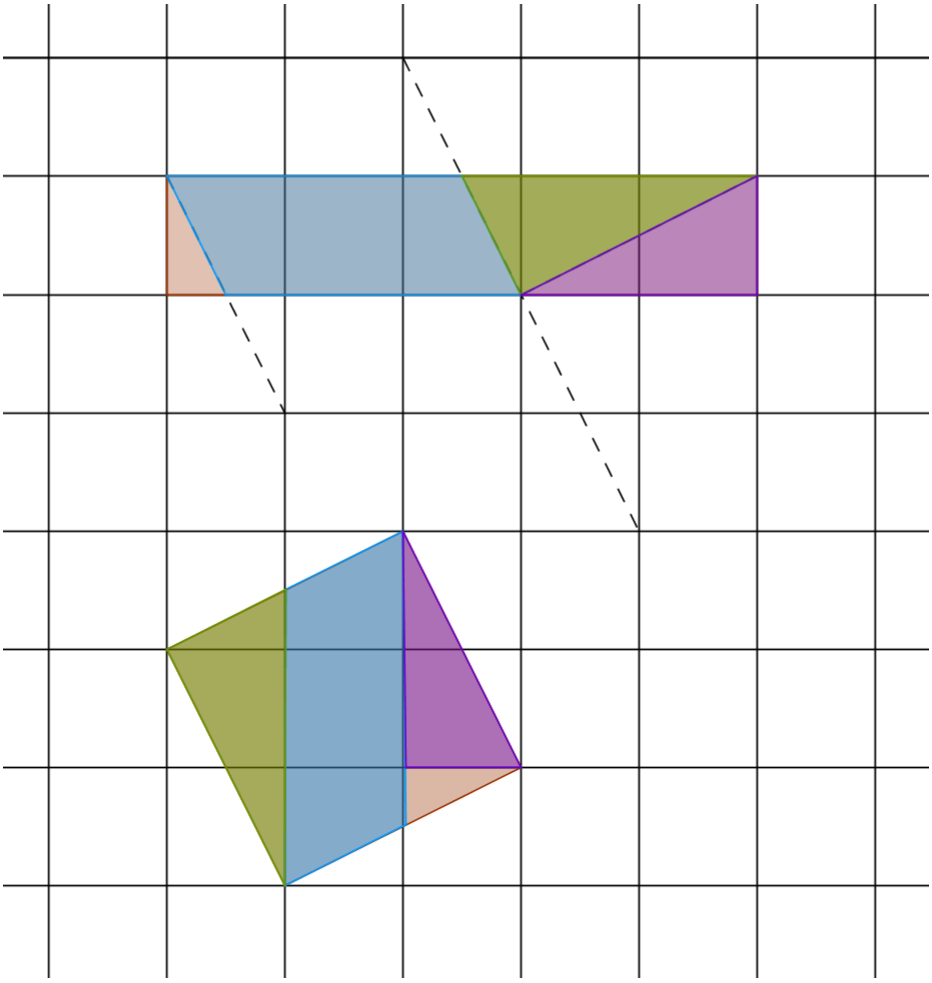
(−/+) Найден цикл, который увеличивает капитал, и более не сделано никаких значимых продвижений.

(+/−) Приведён алгоритм, использующий умножение на $\frac{12}{11}$ при каждом цикле, но не доказано, что таким способом можно получить любую сумму. Т.е. не доказано, что $\left(\frac{12}{11}\right)^n$ может стать больше 3, или приведено неверное доказательство (например, неравенство $\left(\frac{12}{11}\right)^n > 3$ выведено из возрастания дроби $\left(\frac{12}{11}\right)^n$ при увеличении n).

(+) Задача полностью решена. В случае приведения алгоритма с линейным приростом капитала (аналогичного приведённому выше) обоснования того, что нужная сумма будет достигнута, не требуется.

5. Прямоугольник размером 5×1 разрежьте на 4 части и сложите из них квадрат. Части можно переворачивать и поворачивать, но нельзя накладывать друг на друга, и внутри квадрата не должно быть непокрытых участков.

Ответ. См. рисунок.



Критерии.

(−)

(−.)

(−/+) Верная идея разрезания, но размеры частей неправильные.

(+/2)

(+/−) Приведён верный способ разрезания и приблизительно верно указаны размеры частей, но не указан способ складывания квадрата.

(+.) Прямоугольник разрезан верно, квадрат сложен, но не указаны относительные размеры частей, т.е. не хватает точности в описании разрезов, или части неверно пронумерованы.

(+)

6. Найти все натуральные числа n, такие, что число $n^2 + 77n$ является точным квадратом натурального числа.

Ответ. 4, 99, 175, 1444.

Решение. <u>ПЕРВЫЙ СПОСОБ.</u> Пусть $n(n+77) = m^2$, где m, n — натуральные числа. Рассмотрим 4 случая:

- НОД$(n, 77)$=1. В этом случае числа n и $n+77$ взаимно простые, а значит каждое из них является точным квадратом: $n = p^2$, $n + 77 = q^2$. Отсюда $q^2 - p^2 = 77$, т.е. либо $q - p = 1, q + p = 77$, либо $q - p = 7, q + p = 11$. В первом случае получаем $q = 39, p = 38, n = 1444$, во втором случае $q = 9, p = 2, n = 4$.

- НОД$(n, 77)$=7, т.е. $n = 7s$, где s не делится на 11. Тогда $49s(s + 11) = m^2$. Поскольку числа s и $s + 11$ взаимно просты, то каждое из них является точным квадратом: $s = p^2$, $s + 11 = q^2$. Отсюда $q^2 - p^2 = 11$, т.е. $q - p = 1$, $q + p = 11$, $q = 6, p = 5, s = 25, n = 175$.

- НОД$(n, 77)$=11, т.е. $n = 11s$, где s не делится на 7. Тогда $121s(s + 7) = m^2$. Поскольку числа s и $s + 7$ взаимно просты, то каждое из них является точным квадратом: $s = p^2$, $s + 7 = q^2$. Отсюда $q^2 - p^2 = 7$, т.е. $q - p = 1$, $q + p = 7$, $q = 4, p = 3, s = 9, n = 99$.

- НОД$(n, 77)$=77, т.е. $n = 77s$. Тогда $77^2 s(s + 1) = m^2$. Поскольку числа s и $s + 1$ взаимно просты, то каждое из них является точным квадратом: $s = p^2$, $s+1 = q^2$. Отсюда $q^2 - p^2 = (q - p)(q + p) = 1$, а значит $p = 0$, т.е. $s = n = 0$. Противоречие, т.к. по условию n — натуральное число.

<u>ВТОРОЙ СПОСОБ.</u> Пусть $n(n+77) = m^2$, где m, n — натуральные числа. Умножая обе стороны на 4 и дополняя левую часть до полного квадрата, получаем

$$4n^2 + 4 \cdot n \cdot 77 + 77^2 = 4m^2 + 77^2,$$

$$(2n + 77)^2 = 4m^2 + 77^2,$$

$$(2n + 77 - m)(2n + 77 + m) = 77^2.$$

Пусть $2n + 77 - m = a$, $2n + 77 + m = b$. Тогда

$$ab = 77^2, \ a < b, \qquad (1)$$

$$2n + 77 = \frac{a + b}{2}, \ n = \frac{a + b - 2 \cdot 77}{4}. \qquad (2)$$

Из условия (1) для пары (a, b) имеем 4 случая: $(1, 77^2)$, $(7, 7{\cdot}11^2)$, $(11, 11{\cdot}7^2)$, $(49, 121)$. Для каждого из них вычисляем n согласно условию (2), получаем те же ответы, что выше.

Критерии.

(–) Ответ без попыток доказательства.

(–.) Разобран только случай, когда оба числа n и $n + 77$ — точные квадраты.

(−/+) Потеряно одно значение n.

(+/2) Решение, аналогичное первому авторскому решению, но в котором не доказано, что 77/НОД(n,77) представляяется в виде разности точных квадратов.

(+) Правильно найдены все четыре значения n и доказано, что других решений нет.