ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА МАТЕМАТИКА

1. Коля придумал себе развлечение: он переставляет цифры в числе 2015, после чего ставит между любыми двумя цифрами знак умножения. При этом ни один из получившихся двух сомножителей не должен начинаться с нуля. Затем он вычисляет значение этого выражения. Например: $150 \cdot 2 = 300$, или $10 \cdot 25 = 250$. Какое наибольшее число у него может получиться в результате такого вычисления?

Ответ. 1050

Решение. Заметим три факта (обоснование их очевидно). Во-первых, при максимальном произведении в каждом из сомножителей цифры идут в порядке убывания. Т.е. 0 должен стоять в конце одного из сомножителей. Во вторых, без разницы, в конце какого из двух сомножителей поставить 0, произведение от этого не изменится. Поэтому можно переставить его так, чтобы оба сомножителя стали двузначными. После этого остаётся перебрать 3 варианта:

$$21 \cdot 50 = 1050, \qquad 52 \cdot 10 = 520, \qquad 51 \cdot 20 = 1020.$$

Критерии.

(−)

(−.) Правильный ответ с примером. Не объяснено, почему он правильный.

(−/+) Пропущено существенное число случаев

(+/2) Написано, что рассматривать можно только половину случаев (например, случай трёхзначного и однозначного числа), но объяснение неудовлетворительно

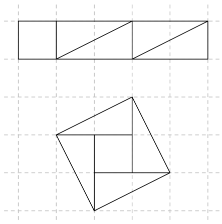
(+/−) Пропущено 1-2 случая

(+.)

(+) Правильный ответ с разбором всех случаев.

2. Одна сторона прямоугольника в 5 раз длиннее другой. Покажите, как разрезать этот прямоугольник на 5 частей и сложить из них квадрат. Части можно переворачивать и поворачивать, но нельзя накладывать друг на друга, и внутри квадрата не должно быть непокрытых участков.

Ответ. См. рисунок.



Критерии.

(−)

(−.)

(−/+) Верная идея разрезания, но размеры частей неправильные.

(+/2)

(+/−) Приведён верный способ разрезания и приблизительно верно указаны размеры частей, но не указан способ складывания квадрата.

(+.) Прямоугольник разрезан верно, квадрат сложен, но не указаны относительные размеры частей, т.е. не хватает точности в описании разрезов, или части неверно пронумерованы.

(+)

3. Петя, Саша и Миша играют в теннис на вылет. Игра на вылет означает, что в каждой партии играют двое, а третий ждёт. Проигравший партию уступает место третьему и в следующей партии сам становится ждущим. Петя сыграл всего 12 партий, Саша — 7 партий, Миша — 11 партий. Сколько раз Петя выиграл у Саши?

Ответ. 4

Решение. Найдем сначала общее количество сыгранных партий. Петя, Паша и Миша в сумме участвовали в $12 + 7 + 11 = 30$ партиях. В каждой партии два участника, поэтому количество партий в два раза меньше: $30/2 = 15$.

Значит, Петя *не* участвовал в $15 - 12 = 3$ партиях, Паша — в $15 - 7 = 8$ партиях, Миша — в $15 - 11 = 4$ партиях.

Заметим теперь, что при игре втроем на вылет один игрок не может пропустить две партии подряд. Поскольку Паша не участвовал в 8 партиях из 15, то стало быть, он не участвовал в самой первой и затем пропускал каждую вторую партию. Это означает, что Паша проиграл все свои партии.

Значит, количество побед Пети над Пашей равно количеству партий, в которой встречались Петя с Пашей. А это количество равно количеству партий, в которых не участвовал Миша, то есть 4, как найдено ранее.

Критерии.

(−.) Частный случай с верным ответом,

или

доказано, что сыграно 15 партий.

(−/+) Частный случай с верным ответом + доказано, что сыграно 15 партий

(+/2) Доказано, что Саша проиграл все партии, и правильный ответ на конкретном примере, без достаточного обоснования.

(+/−)

(+.) Задача решена верно с одним недостатком: нет строгого доказательства того, что было сыграно 15 партий.

(+) Верный и строго обоснованный ответ.

4. Числа x и y таковы, что $x + y = xy = 17$. Найти значение выражения:

$$(x^2 - 17x)\left(y + \frac{17}{y}\right).$$

Ответ. -289

Решение. $x - 17 = -y$, $\frac{17}{y} = x$. Искомое выражение равно:

$$x(x - 17)(y + x) = -xy \cdot 17 = -289.$$

Критерии.

(−)

(−.)

(−/+) Серьёзная арифметическая ошибка, влияющая на ход решения, или несколько арифметических ошибок.

(+/2)

(+/−) Одна арифметическая ошибка при в целом правильном решении (например, неправильно перемножены 17 и 17 в последнем действии).

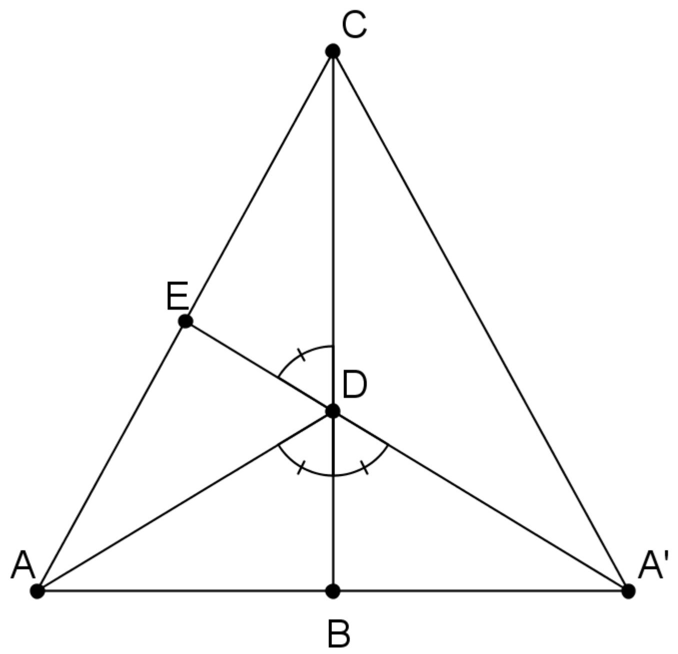
(+.) Пропуск незначительных выкладок.

(+)

5. Дан треугольник ABC, $\angle B = 90^\circ$. На сторонах AC, BC выбраны точки E и D соответственно, такие, что $AE = EC$, $\angle ADB = \angle EDC$. Найти отношение $CD : BD$.

Ответ. $2:1$

Решение. Построим треугольник $A'BC$, симметричный данному относительно стороны BC. Точки A', D, E лежат на одной прямой, т.к. $\angle A'DB = \angle EDC$. Следовательно D — точка пересечения медиан $A'E$ и CB треугольника $AA'C$, и делит их в отношении $2:1$ считая от вершины.



Критерии.

(−)

(−.)

(−/+) Правильные дополнительные построения, есть продвижения в решении.

(+/2) Решение, совпадающее приведённым выше. Не доказано, что точки D, E, A' лежат на одной прямой.

(+/−) В целом верное решение с некоторыми неточностями

(+.)

(+)

6. В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты ($\mathcal{E}$) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов а один кокос - на $1/15$ доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \leftrightarrows \mathcal{E}$ и $\$ \leftrightarrows$Б в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

Ответ. Может.

Решение. Рассмотрим цикл К$\to \mathcal{E} \to$ Б $\to$ К. Этот цикл позволяет увеличивать количество имеющейся валюты. Действительно, если изначально было 11 кокосов, то они обмениваются на 1 енота, который в свою очередь обменивается на 6 бананов, которые обмениваются на 12 кокосов. Таким образом, из 11 кокосов получается 12 кокосов.

Будем каждый раз запускать по такому циклу ровно 11 кокосов, т.е. прибыльный 12-й кокос будем каждый раз откладывать. Тогда, сделав n циклов, мы можем заработать ровно n кокосов. Теперь стратегия например такова: обмениваем 100\$ на 1000 кокосов, берём 11 из этой 1000 и производим n раз цикл, в результате получаем $1000+n$ кокосов. Если $n \geq 2000$, то в результате получим $\geq$3000 кокосов, которые обменяем обратно на $\geq$200\$.

Критерии.

(−/+) Найден цикл, который увеличивает капитал, и более не сделано никаких значимых продвижений.

(+/−) Приведён алгоритм, использующий умножение на $\frac{12}{11}$ при каждом цикле, но не доказано, что таким способом можно получить любую сумму. Т.е. не доказано, что $\left(\frac{12}{11}\right)^n$ может стать больше 3, или приведено неверное доказательство (например, неравенство $\left(\frac{12}{11}\right)^n > 3$ выведено из возрастания дроби $\left(\frac{12}{11}\right)^n$ при увеличении n).

(+) Задача полностью решена. В случае приведения алгоритма с линейным приростом капитала (аналогичного приведённому выше) обоснования того, что нужная сумма будет достигнута, не требуется.