ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА МАТЕМАТИКА

1. Действительные числа x, y, z выбираются так, что выполняются равенства: $xy+yz+zx=4$, $xyz=6$. Доказать, что при любом таком выборе значение выражения

$$\left(xy-\frac{3}{2}(x+y)\right)\left(yz-\frac{3}{2}(y+z)\right)\left(zx-\frac{3}{2}(z+x)\right)$$

является одним и тем же числом, и найти это число.

Ответ. $\frac{81}{4}$.

Решение. Из условия следует, что x, y, z — ненулевые числа. Из данных равенств получаем $xy=\frac{6}{z}$ и $x+y=\frac{4-xy}{z}=\frac{4}{z}-\frac{xy}{z}$. Подставляя это в первую скобку, получаем

$$xy-\frac{3}{2}(x+y)=\frac{6}{z}-\frac{3}{2}\left(\frac{4}{z}-\frac{xy}{z}\right)=\frac{3xy}{2z}.$$

Аналогично со второй и третьей скобкой. В итоге данное выражение преобразуется в

$$\frac{3xy}{2z}\cdot\frac{3yz}{2x}\cdot\frac{3zx}{2y}=\frac{27xyz}{8}=\frac{81}{4}.$$

Критерии.

(−.) Правильный ответ получен путём подстановки в искомое выражение конкретных значений x, y, z, удовлетворяющих условию. Не доказано, что при других значениях x, y, z ответ будет таким же.

(+.) Арифметическая ошибка, допущенная в числовых расчётах (после избавления от x, y, z), при условии, что остальная часть решения верна.

(+) Правильный ответ, полученный вычислением, в котором все переходы обоснованы и верны при любых значениях x, y, z, удовлетворяющих условию задачи.

2. В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты ($\mathcal{E}$) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов а один кокос - на $1/15$ доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \leftrightarrows \mathcal{E}$ и $\$ \leftrightarrows$Б в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

Ответ. Может.

Решение. Отметим, что в условии задачи не сказано явно, требуется ли получить не менее 200\$, или ровно 200\$. Ответ положительный для обеих трактовок условия. Хотя понятно, что решение для случая "роно 200\$" решает так же и второй случай, мы приведём разные решения для обоих случаев, т.к. в работах участников достаточно часто встречались обе трактовки.

а) Нужно получить не менее 200\$.

Рассмотрим цикл К$\to \mathcal{E} \to$ Б $\to$ К. Если обменивать деньги по такому циклу, то количество денег увеличивается. Действительно, если было изначально x кокосов, то они обмениваются на $\frac{x}{11}$ енотов, которые в свою очередь обмениваются на $\frac{6x}{11}$ бананов, которые обмениваются на $\frac{12x}{11}$ кокосов. Таким образом, из x кокосов получается $\frac{12x}{11}$ кокосов.

Стратегия дяди Васи такова: вначале обменять 100 долларов на 1000 кокосов. Затем обменивать их по указанному выше циклу, пока не получится более 3000 кокосов. Для этого цикл придётся пройти n раз, где n таково, что $\left(\frac{12}{11}\right)^n > 3$. Поскольку $\frac{12}{11} > 1$, это неравенство равносильно неравенству $n > \log_{\frac{12}{11}} 3$. Очевидно, натуральное n, удовлетворяющее этому условию, существует.

Получившиеся в результате кокосы следует обменять на доллары, которых получится не менее $\frac{3000}{15} = 200$.

б) Нужно получить ровно 200\$. Рассмотрим тот же цикл, что в пункте а), но будем каждый раз запускать по обменному циклу ровно 11 кокосов, т.е. прибыльный 12-й кокос будем каждый раз откладывать. Тогда, сделав n циклов, мы можем заработать ровно n кокосов. Теперь стратегия например такова: обмениваем 100\$ на 1000 кокосов, берём 11 из этой 1000 и производим n раз цикл, в результате получаем $1000+n$ кокосов. Если $n = 2000$, то в результате получим 3000 кокосов, которые обменяем обратно на 200\$.

Критерии.

(−/+) Найден цикл, который увеличивает капитал, и более не сделано никаких значимых продвижений.

(+/−) Приведён алгоритм, дающий экспоненциальный рост капитала, однако не приведено доказательство того, что этот алгоритм когда-либо достигнет нужной суммы, или приведено неверное доказательство, например, неограниченость капитала "выведена" из его возрастания.

(+) Задача полностью решена. В случае приведения алгоритма с линейным приростом капитала обоснования того, что нужная сумма будет достигнута, не требуется.

3. Даны три точки A, B, C, образующие треугольник с углами $30°, 45°, 105°$. Выбираются две из этих точек, и проводится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, после чего третья точка отражается относительно этого серединного перпендикуляра. Получаем четвёртую точку D. С получившимся набором из 4 точек осуществляется та же процедура — выбираются две точки, проводится серединный перпендикуляр и все точки отражаются относительно него. Какое наибольшее количество *различных* точек можно получить в результате многократного повторения этой процедуры?

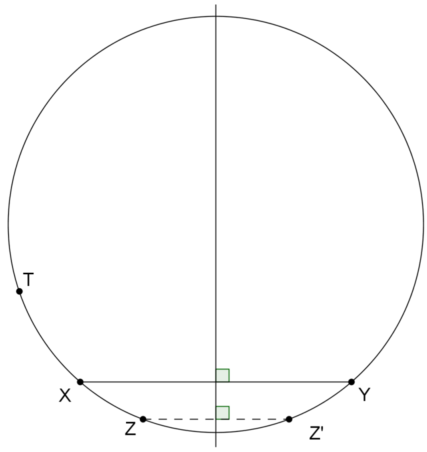
Ответ. 12 точек.

Решение. ПЕРВЫЙ СПОСОБ.

1. Пусть XY – границы отрезка, к которому мы проводим срединный перпендикуляр; Z – точка, которую отражаем; Z' – образ Z. Тогда точка Z' лежит на окружности, описанной около треугольника XYZ. Это следует из того, что серединный перпендикуляр к любой хорде проходит через центр окружности и, следовательно, является её осью симметрии. Отсюда следует, что все новые получающиеся точки будут лежать на одной окружности.

2. Докажем, что если достигнуто максимальное количество точек, то все они являются вершинами правильного многоугольника. Как доказано выше, все они лежат на одной окружности. Выберем какую-то из получившихся точек, назовем ее первой, а остальные занумеруем против часовой стрелки. Выберем три последовательные точки A_{i-1}, A_i и A_{i+1} и проведем срединный перпендикуляр к отрезку $A_{i-1}A_{i+1}$. Если он не проходит через A_i, то при отражении точки A_i относительно него получилась бы еще одна точка на дуге $A_{i-1}A_{i+1}$, что противоречит максимальности. Значит A_i лежит на этом серединном перпендикуляре, а потому отрезки A_iA_{i+1} и A_iA_{i-1} равны. Таким образом, все точки образуют вписанный многоугольник с равными сторонами, т.е. правильный многоугольник.

3. Докажем, что градусная мера дуги между двумя соседними точками не может быть меньше $30°$. Пусть отражаем точку Z относительно срединного перпендикуляра к XY, точки Z и X лежат в одной полуплоскости относительно перпендикуляра, а образ Z при отражении – точка Z' (см. рисунок ниже). Тогда дуга $\smile{Z'Y}$ равна дуге $\smile{ZX}$. Пусть далее T — произвольная точка на окружности. Тогда для дуги $\smile{TZ'}$ имеет место равенство $\smile{TZ'} = \pm \smile{TY} \pm \smile{XZ}$ (знаки выбираются в зависимости от расположения точек и способа измерения дуг, на рисунке ниже рассмотрен один из случаев).Тогда градусная величина дуги $\smile{TZ'}$ кратна наибольшему общему делителю дуг $\smile{TY}$ и $\smile{XZ}$, т.е. НОД градусных величин всех дуг при такой операции остаётся неизменным. Изначально точки A, B, C разбивают окружность на дуги, градусные меры которых равны $60°,\ 90°,\ 210°$. Сооственно, наибольший общий делитель равен $30°$, а значит градусные мер всех получаемых дуг будут кратны $30°$ и не смогут быть меньше $30°$.



$\breve{TZ'}=\breve{AY}-\breve{XZ}$

4. Будем теперь выполнять указанную в задаче операцию до тех пор, пока можно получить хотя бы одну новую точку. Из доказанного выше п.3 следует, что это не может продолжаться бесконечно: все дуги с концами в получающихся точках кратны 30°, поэтому общее количество точек будет не больше 12. В то же время из п.2 следует, что когда будет достигнут максимум, точки будут образовывать правильный многоугольник, причём величина дуги между соседними его вершинами будет наибольшим общим делителем всех остальных дуг, т.е. будет равна 30°. А значит точек будет ровно $360/30 = 12$.

<u>ВТОРОЙ СПОСОБ</u>

Точки, получающиеся в результате отражений, а так же точки A, B, C, данные изначально, будем называть отмеченными.

Рассмотрим правильный 12-угольник $A_1A_2\ldots A_{12}$. Углы треугольника $A_1A_3A_6$ равны 30°, 45°, 105°, т.е. можно считать, что изначально отмечены точки A_1, A_3, A_6. Докажем, что все отмеченные точки будут вершинами данного 12-угольника. Доказываем индукцией по количеству отражений. Изначально это верно. Пусть это верно после $n-1$ отражений. Тогда отражение с номером n выполняется относительно серединного перпендикуляра к какому-то из отрезков A_iA_j. Но любой такой серединный перпендикуляр является осью симметрии 12-угольника, и значит все его вершины перейдут снова в вершины. Т.е. новые отмеченные точки снова будут вершинами многоугольника. Утверждение доказано.

Итак, никаких других отмеченных точек кроме вершин 12-гольника не будет. Теперь покажем, что все 12 вершин можно сделать отмеченными. Это можно сделать разными способами.

Будем использовать запись $(A_iA_j) \to A_k, A_l, \ldots$, которая означает, что в результате отражения относительно серединного перпендикуляра к отрезу A_iA_j появятся новые отмеченные точки A_k, A_l...

Изначально отмечены A_1, A_3, A_6.

$(A_1A_6) \to A_4$
$(A_1A_3) \to A_{10}, A_{12}$
$(A_1A_4) \to A_2, A_5, A_{11}, A_7$
$(A_6A_7) \to A_8, A_9$.

Теперь отмечены все 12 вершин.

Критерии. В полном решении должны быть явно прописаны две части: 1) доказательство того, что больше 12 точек получить невозможно, и 2) доказательство того, что ровно 12 точек можно получить.

Если присутствует только один из этих двух пунктов, решение оценивается как неполное.

(−) Правильный ответ, полученный с помощью неверных или никак не обоснованных действий (например деление угла $360°$ на наименьший угол треугольника).

(−.) Разумные рассуждения в решении. Например: утверждается, что максимум достигается, когда точки образуют правильный многоугольник.

(−/+) Доказано, что все точки лежат на одной окружности.

(+/2) построен пример (либо задана последовательность отражений, либо нарисован 12-угольник и показано расположение изначального треугольника + объяснено, как получить соседние тоочки),

(+/−) построен пример + есть доказательство максимальности с серьезными недочетами

или

есть чистое (или с незнаительными недочетами) доказательство максимальности, но не построен пример.

(+.) Мелкие недочёты при в целом правильном решении.

(+) Правильное решение без недочётов, содержащее ответ и все необходимые шаги доказательства.

4. Приведите пример функции $f(x)$, для которой выполняются все три перечисленных ниже условия:

- область определения функции $f(x)$ — множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$,
- при любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = b$ имеет ровно одно решение,
- при любом $a > 0$ и любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = ax + b$ имеет не менее двух решений.

Ответ. $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Замечание: это простейший пример, но возможны и другие ответы. В работах участников олимпиады встречались довольно сложные примеры непрерывных функций, удовлетворяющих всем условиям задачи.

Решение. Проверим выполнение условий.

- Прямо из определения следует, что функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$.
- Если $b \neq 0$, то при $x \neq 0$ уравнение $f(x) = b$ имеет единственное решение $x = \frac{1}{b}$, а $x = 0$ решением не является. Т.е. имеем ровно одно решение.

  Если $b = 0$, то при $x \neq 0$ уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений, а $x = 0$ решением является. Т.е. в этом случае тоже ровно одно решение.
- Если $a > 0$, то уравнение $f(x) = ax + b$ имеет два ненулевых решения. Действительно, при $x \neq 0$ уравнение запишется в виде $\frac{1}{x} = ax + b \Leftrightarrow ax^2 + bx - 1 = 0$. Дискриминант здесь строго положителен, поэтому уравнение имеет два корня, и они оба не равны 0, т.е. оба являются корнями исходного уравнения. Поскольку ненулевых решений ровно два, то всего решений не менее двух. (Отметим, что при $b = 0$ уравнение имеет три решения, т.к. $x = 0$ также является решением.)

Критерии. «Стандартным примером» называем функцию $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(−) Неверный ответ или отсутствие ответа.

(−.) В качестве ответа приведена функция $f(x) = 1/x$ без доопределения в нуле или с неправильным доопределением, и без доказательства того, что уравнение $1/x = ax + b$ при $a > 0$ имеет два решения.

(−/+) Стандартный пример (или похожий) задан графиком, с явно добавленной изолированной точкой, символизирующей значение в нуле, но без формул,

или

приведён ответ $f(x) = 1/x$ без доопределения в нуле, но с доказательством того, что уравнение $1/x = ax + b$ при $a > 0$ имеет два решения.

(+/2) Построен правильный пример (формулой или алгоритмом построения) без обоснования или с неверным обоснованием (например, обоснование каждого свойства заменено его переформулировкой).

(+/−) Правильный пример с четким и полным обоснованием второго свойства, но без правильного обоснования третьего свойства.

или

Обоснование третьего свойства опирается на строго не обоснованное утверждение, что график линейной функции с положительным угловым коэффициентом имеет пересечение с графиком $1/x$ как в первой, так и в третьей четверти (если есть обоснование со ссылкой на непрерывность и теорему о промежуточном значении, то это является строгим доказательством и оценивается выше).

или

Имеется много (больше двух) мелких дефектов, типа тех, что перечислены в критерии для (+.).

(+.) Пример строится в виде кусочно-линейной функции; обоснование основывается на том, что отрезок или ломанная, соединяющая две точки, лежащие по разные стороны от прямой, пересекает эту прямую (доказательство этого факта не требуется); но это обоснование содержит незначительные пробелы (например, отсутствует аккуратное объяснение того, что построенная ломанная уходит на бесконечность как по x, так и по y).

или

Предъявлен стандартный пример, но в доказательстве имеется не более двух мелких дефектов, к примеру таких:

1. Имеется неверное утверждение, от которого решение в действительности не зависит (то есть можно вычеркнуть несколько строк, содержащих неверное утверждение, и останется правильное и полное доказательство).
2. Нет полного обоснования того, что при любом b уравнение $f(x) = b$ имеет единственное решение (например, обоснование подменено переформулировкой типа "функция задает взаимно-однозначное отображение $\mathbb{R}$ на себя" или "график функции имеет единственную точку пересечения с каждой горизонтальной прямой").
3. При доказательстве третьего условия доказано, что дискриминант получающегося квадратного уравнения положителен, но не объяснено, что корни его ненулевые, и тем самым действительно дают два решения уравнения $1/x = ax + b$.

(+) Предъявлен правильный пример функции с полным доказательством выполнения всех трех условий.

5. Обозначим через T_k произведение первых k нечётных простых чисел: $T_1 = 3$, $T_2 = 3 \cdot 5$, $T_6 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ и т.д. Для каждого натурального k найти количество натуральных чисел n таких, что число $n^2 + T_k n$ является точным квадратом натурального числа. Решить задачу: а) для $k = 1$, б) для $k = 2$, в) для произвольного заданного натурального k.

Ответ. $\frac{3^k-1}{2}$.

Решение. ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Запишем условие задачи в виде уравнения

$$n^2 + T_k n = m^2 \text{ при некотором } m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

Обозначим $d = \text{НОД}(n,\ T_k)$, $\nu = \frac{n}{d}$, $r = \frac{T_k}{d}$. Тогда числа d, ν, r удовлетворяют системе

$$\begin{cases} d^2 \cdot \nu(\nu + r) = m^2 \text{ при некотором } m \in \mathbb{N}, \\ dr = T_k, \\ \text{НОД}(\nu, r) = 1 \Leftrightarrow \text{НОД}(\nu, \nu + r) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Обратно, каждое решение (d, r, ν) системы (2) приводит к решению уравнения (1) путём замены $n = d\nu$. Эти замены взаимно обратны, т.к. при замене $n = d\nu$ в системе (2) число d оказывается наибольшим общим делителем чисел n, T_k. Таким образом, между решениями уравнения (1) и системы (2) имеется взаимно-однозначное соответствие, т.е. у них одинаковое количество решений.

Из первого и третьего равенств системы (2) следует, что каждое из чисел $\nu, \nu + r$ является точным квадратом: $\nu = a^2$, $\nu + r = b^2$. Отсюда следует

$$\begin{cases} d(b - a)(b + a) = T_k, \\ \text{НОД}(a, b) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Обратно, для любых d, a, b, удовлетворяющих (3), замена $\nu = a^2$, $r = b^2 - a^2$ приводит к решению системы (2). Т.е. у этих систем одинаковое количество решений.

Наконец обозначим $b - a = r_1$, $b + a = r_2$. Тогда из системы (3) следует

$$\begin{cases} dr_1 r_2 = T_k, \\ r_1 < r_2. \end{cases} \tag{4}$$

Покажем, что из (4) при обратной замене $b = \frac{r_1 + r_2}{2}$, $a = \frac{r_2 - r_1}{2}$ следует (3). Прежде всего числа a, b, определяемые этой заменой, натуральные, т.к. r_1, r_2 — нечётные. Первое равенство системы (3) очевидно. Используя свойства НОД и нечётность r_1, r_2, получаем $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a+b, b) = \text{НОД}(r_2, \frac{r_1+r_2}{2}) = \text{НОД}(r_2, r_1 + r_2) = \text{НОД}(r_2, r_1) = 1$.

Т.е. у систем (4) и (3) одинаковое количество решений.

Найдём количество решений системы (4). Количество разложений T_k на три множителя равно 3^k. (Каждый простой делитель T_k может войти в одно из чисел d, r_1, r_2). Среди этих разложений есть единственное, в котором $r_1 = r_2 = 1$, во всех остальных $r_1 \neq r_2$. Следовательно таких, где $r_1 < r_2$, будет ровно половина, т.е. $\frac{3^k-1}{2}$.

ВТОРОЙ СПОСОБ. Как и выше, запишем условие в виде уравнения

$$n^2 + T_k n = m^2 \text{ при некотором } m \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Тогда

$$n^2+T_kn = m^2 \Leftrightarrow 4n^2+4T_kn+T_k^2 = 4m^2+T_k^2 \Leftrightarrow T_k^2 = (2n+T_k)^2-4m^2 = (2n-2m+T_k)(2n+2m+T_k).$$

Обозначим $2n-2m+T_k = a,\ 2n+2m+T_k = b$. Тогда

$$a < b, \quad T_k^2 = ab, \quad b > 0 \Rightarrow a > 0. \tag{6}$$

Итак, из каждого n, удовлетворяющего (5), получается пара натуральных чисел a, b, удовлетворяющая (6). Покажем, что при обратной замене из каждой такой пары a, b получается число n — решение уравнения (5). Пусть a, b — два числа, удовлетворяющих (6). Поскольку $ab = T_k^2 \equiv 1(\mod 4)$, имеем либо $a \equiv b \equiv 1(\mod 4)$ либо $a \equiv b \equiv 3(\mod 4)$. В обоих случаях $a+b \equiv 2 \equiv 2T_k(\mod 4)$. Обратная замена задаётся равенством

$$n = \frac{a+b-2T_k}{4}. \tag{7}$$

Из сказанного следует, что так определённое число n — целое. Из неравенства $a+b > 2\sqrt{ab} = 2T_k$ следует, что $n > 0$, т.е. $n \in \mathbb{N}$. Прямой подстановкой можно проверить, что для такого n выполнено равенство (5), если $m = \frac{b-a}{4}$. (Из $a \equiv b(\mod 4)$ следует, что $\frac{b-a}{4}$ – целое). Наконец, по заданному произведению $ab = T_k^2$ и сумме $a+b = 4n+2T_k$ числа a, b однозначно определяются, откуда следует, что различным парам (a, b) соответствуют различные n.

Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между числами n, удовлетворяющими (5), и парами (a, b), удовлетворяющими (6). Найдём количество таких пар (a, b).

Пусть $T_k^2 = ab$ – произвольное разложение числа T_k^2 на два множителя. Количество таких разложений равно количеству делителей числа T_k^2, т.е. 3^k. Равенство $a = b$ возможно в единственном случае $a = b = T_k$, во всех остальных (3^k-1) разложениях имеем $a \neq b$. Условие $a < b$ выполнено в половине из них, т.е. имеем $\frac{3^k-1}{2}$ искомых пар (a, b).

Критерии.

(–.) Решён один из пунктов а),б) (правильный ответ + полное обоснование).

(–/+) Решены оба пункта а) и б), возможно мелкая вычислительная (но не логическая) ошибка в пункте б), не влияющая на принципиальную правильность решения. Если при переборе в пункте б) упущен один или несколько случаев — это логическая ошибка, и оценка не выше (-.)

(+/2) Правильно решены и полностью обоснованы пункты а),б), причём решение использует подход (с помощью разложения на множители), который может быть обобщён для произвольного k. Сделана попытка обобщить этот подход, т.е. написано ключевое разложение на множители в общем виде, дальнейших продвижений нет.

(+/–) Продолжение (+/2): правильно решены а)б), в пункте в) отчётливо сформулировано сведение задачи к комбинаторике, т.е. сказано: количество искомых чисел n равно количеству разложений такого-то числа на такие-то множители с такими-то условиями.

(+.) Пункт в) решён (предъявлен правильный ответ), но с небольшими пробелами в обосновании. Например не доказана взаимная однозначность множеств решений при сведении задачи к комбинаторике.

(+) Решён пункт в) с полным обоснованием всех шагов, включая взаимно-однозначные соответствия между множествами решений различных получающихся уравнений.

6. В пространстве даны 270 шаров равных радиусов, любые два из которых пересекаются. Докажите, что среди них можно выбрать 10 шаров так, что найдётся точка, принадлежащая всем выбранным шарам.

Решение. ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Пусть радиусы шаров равны 1 (очевидно, конкретное значение радиусов не влияет на решение). Выберем один из них, пусть его центр O. Тогда центры всех остальных шаров находятся от O на расстоянии не больше 2, а значит расстояние от O до любой точки любого шара не больше 3. Итак, все 270 шаров находятся внутри шара радиуса 3 с центром в точке O. Пусть V — объём этого большого шара, v — объёмы данных 270 шаров. Согласно принципу Дирихле если 270 шаров общим объёмом $270v$ помещены внутри шара объёмом V, то найдётся точка, принадлежащая не менее чем $\frac{270v}{V}$ шарам. Поскольку объём пропорционален кубу радиуса, то $\frac{270v}{V} = \frac{270}{27} = 10$.

ВТОРОЙ СПОСОБ. Мы докажем более сильную оценку, а именно, что найдётся точка, принадлежащая 34 шарам. Пусть радиусы шаров равны 1. Переформулируем задачу: даны 270 точек (центров шаров), расстояние между любыми двумя из которых не больше 2. Доказать, что найдётся шар радиуса 1, содержащий не менее 34 из этих точек.

Центры всех шаров можно поместить внутрь куба со стороной 2. Действительно, проведём две плоскости, между которыми расположены все рассматриваемые точки, и будем "сдвигать" эти плоскости параллельно самим себе, до тех пор, пока это возможно (т.е. пока все точки будут находиться между этими плоскостями). В крайнем положении каждая из плоскостей пройдёт через одну из точек, а расстояние между плоскостями будет не больше 2 (т.к. расстояние между плоскостями не больше отрезка с концами на этих плоскостях).

Аналогично проведём две другие плоскости, перпендикулярные данным, и третью пару плоскостей, перпендикулярную всем проведённым. Получим прямоугольный параллелепипед с рёбрами не больше 2, внутри которого содержатся все 270 точек — центров шаров. В свою очередь этот параллелепипед можно помистить в куб с ребром 2.

Разобъём получившийся куб на 8 кубиков с рёбрами 1. По принципу Дирихле хотя бы в одном из них содержится не менее $\frac{270}{8} > 33$ точек, т.е. хотя бы 34 точки. Диагональ каждого такого кубика равна $\sqrt{3} < 2$, значит радиус его описанной сферы (равный половине диагонали) меньше 1. Следовательно центр этого кубика удалён от каждой из 34 указанных точек на расстояние меньше 1, а значит принадлежит каждому из 34 шаров с центрами в этих точках

Критерии.

(–) Решения, в которых утверждается, что все 270 шаров имеют общую точку.

Попытки доказать утверждение с помощью проектирования шаров.

Попытки посчитать количество пересечений шаров или точек пересечения.

Разбор частных случаев.

Доказательство того, что центры всех шаров лежат в шаре радиуса $2r$.

(−.) Попытки использовать принцип Дирихле (подсчет объемов, подсчет количества центров в определенных кусках пространства),

или

Доказательство того, что все шары полностью лежат в шаре радиуса $3r$.

(−/+) Одновременное выполнение двух условий, перечисленных в (-.), без связи между собой.

(+.) Неясно оформленный принцип Дирихле,

или

Решение, использующее факт того, что все шары лежат в шаре радиуса $3r$, однако доказательство этого факта отсутствует.

(+) Полное решение без серьезных недочетов.

ПЕРЕВОД ОЦЕНОК В БАЛЛЫ

7 класс

Оценка	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
+	20	20	20	20	20	20
+.	18	18	18	18	18	18
+ –	14	14	14	14	14	14
2	10	10	10	10	10	10
– +	5	5	5	5	5	5
–.	2	2	2	2	2	2
–	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

8 класс

Оценка	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
+	20	20	20	20	20	20
+.	18	18	18	18	18	18
+ –	14	14	14	14	14	14
2	10	10	10	10	10	10
– +	5	5	5	5	5	5
–.	2	2	2	2	2	2
–	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

9 класс

Оценка	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
+	20	20	20	20	20	20
+.	18	18	18	18	18	18
+ –	14	14	14	14	14	14
2	10	10	10	10	10	10
– +	5	5	5	5	5	5
–.	2	2	2	2	2	2
–	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

10 класс

Оценка	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
+	20	20	20	20	20	20
+.	18	18	18	18	18	18
+ –	14	14	14	14	14	14
2	10	10	10	10	10	10
– +	5	5	5	5	5	5
–.	2	2	2	2	2	2
–	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

11 класс

Оценка	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
+	20	20	20	20	20	20
+.	16	18	18	18	18	18
+ –	14	14	14	15	14	14
2	10	10	12	12	9	10
– +	5	5	5	6	6	4
–.	2	1	2	0	2	2
–	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба»

2014-2015 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЕРОВ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА по МАТЕМАТИКЕ

Класс	**ПОБЕДИТЕЛИ**	**ПРИЗЕРЫ**	
	Дипломанты 1 степени	Дипломанты 2 степени	Дипломанты 3 степени
	Критерии определения	Критерии определения	Критерии определения
7	от 98 и выше	от 80 до 97	от 60 до 79
8	100	от 92 до 99	от 80 до 91
9	100	от 82 до 99	от 80 до 81
10	от 90 и выше	от 80 до 89	от 65 до 79
11	от 80 и выше	от 65 до 79	от 55 до 64