



**Межрегиональная олимпиада школьников
«Высшая проба»**

2013-2014 учебный год

**ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА по
МАТЕМАТИКЕ**

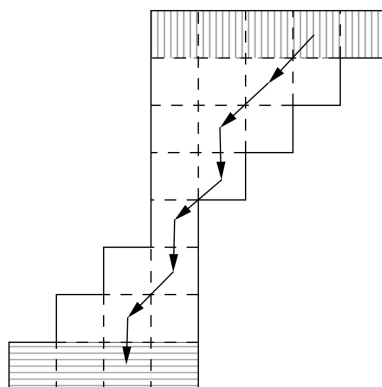
Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.

1. В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «МА», на остальных — «НЯ». Каждый ребёнок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «МАМА» могут сложить из своих карточек 25 детей, слово «НЯНЯ» — 30 детей, а слово «МАНЯ» — 36 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?
2. В некотором натуральном числе посчитали сумму цифр. У получившегося числа снова посчитали сумму цифр, и у получившегося числа снова посчитали сумму цифр. Известно, что каждая новая сумма оказывалась не равна предыдущей. Найти наименьшее возможное исходное число.
3. На стороне AC треугольника ABC выбраны 400 точек P_1, P_2, \dots, P_{400} . (Каждая точка P_i лежит между A и P_{i+1} , точки выбираются произвольно и могут делить сторону на отрезки различной длины.) Рассматриваются треугольники $ABP_1, P_1BP_2, \dots, P_{399}BP_{400}, P_{400}BC$. Какое наибольшее количество равнобедренных может быть среди них?
4. Из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ выбираются три натуральных числа a, b, c (не обязательно различных). Сколько способов это сделать так, чтобы число $a^{(b^c)}$ делилось на 4?
5. В магазине фрукты продаются только в упаковках двух видов: упаковка из 3 яблок и 12 груш стоит 6 долларов, упаковка из 12 яблок и 5 груш стоит 11 долларов. Требуется купить одинаковое (ненулевое) количество яблок и груш. Какую минимальную цену (в долларах) придётся заплатить?
6. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 - различные корни уравнения $x^4 - 2^{2013}x^2 + 49$, идущие в порядке возрастания, т.е. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Найти значение выражения

$$-\frac{(7+x_1)(7+x_3)}{(1+x_2)(1+x_4)}.$$

7. Приведённая ниже диаграмма состоит из 24 единичных квадратов. Лягушка из каждой клетки может прыгнуть либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку влево-вниз по диагонали (не выходя при этом за границы диаграммы). Сколько существует путей лягушки, ведущих из верхнего ряда квадратов в нижний? (На рисунке показан один из путей лягушки. Верхний ряд квадратов выделен вертикальной штриховкой, нижний ряд - горизонтальной штриховкой.)



8. Какое наименьшее количество точек нужно отметить строго внутри правильного семиугольника так, чтобы на каждой диагонали лежала хотя бы одна отмеченная точка?

9. Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках K, L , сторону BC — в точках M, N , сторону AC — в точках R, S . Дано: $KL = MN = RS = 6$, $AB = 10$, $BC = 24$, $\angle ABC = 90^\circ$. Найти радиус окружности.

10. В выражении $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{1000})$ раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?