Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба»

2013-2014 учебный год

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА по МАТЕМАТИКЕ

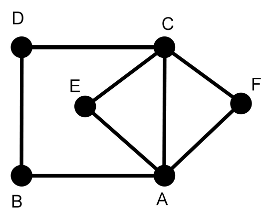
Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Известно, что ни одно из чисел a, b, c не является целым. Может ли случиться так, что каждое из чисел ab, bc, ca, abc — целое?

2. Точка B является серединой отрезка AC. Квадрат $ABDE$ и равносторонний треугольник BCF расположены в одной полуплоскости от прямой AC. Найти (в градусах) величину острого угла между прямыми CD и AF.

3. Двое играют в такую игру: на рисунке, изображённом ниже, в точке A стоит фишка. Они ходят фишкой по очереди, с каждым ходом передвигая фишку из точки, в которой она стоит, в одну из названных на рисунке точек, соединенную с нею отрезком. Два раза по одному отрезку ходить нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон? Обоснуйте свой ответ.



4. Прямые, содержащие высоты неравнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке H. I — центр *вписанной* окружности треугольника ABC, O — центр *описанной* окружности треугольника BHC. Известно, что точка I лежит на отрезке OA. Найдите угол BAC.

5. Клетки шахматной доски раскрашиваются в 3 цвета — белый, серый и черный — таким образом, чтобы соседние клетки, имеющие общую сторону, отличались цветом, однако резкая смена цвета (то есть соседство белой и черной клеток) запрещена. Найдите число таких раскрасок шахматной доски (раскраски, совпадающие при повороте доски на 90 и 180 градусов считаются разными).

6. Последовательность a_n строится следующим образом: $a_1,\ a_2$ — произвольные действительные числа, при $n \geq 3$ число a_n равно наименьшему из чисел $|a_i - a_j|$, $1 \leq i < j \leq n-1$. Например, если $a_1 = 6,\ a_2 = \frac{19}{2}$, то получаем последовательность $6,\ \frac{19}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{5}{2},\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\ldots$. При некотором выборе a_1 и a_2 получилась последовательность, в которой $a_{10} = 1$. Найдите наименьшее возможное значение a_3 в такой последовательности.

Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба»

2013-2014 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЕРОВ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА по МАТЕМАТИКЕ

Класс	**ПОБЕДИТЕЛИ**	**ПРИЗЕРЫ**	
	Дипломанты 1 степени	Дипломанты 2 степени	Дипломанты 3 степени
	Критерии определения	Критерии определения	Критерии определения
7	от 95 и выше	от 80 до 94	от 60 до 79
8	от 85 и выше	от 70 до 84	от 60 до 69
9	от 95 и выше	от 75 до 94	от 60 до 74
10	от 80 и выше	от 60 до 79	от 50 до 59
11	от 80 и выше	от 60 до 79	от 45 до 59