Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба»

2013-2014 учебный год

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА по МАТЕМАТИКЕ

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.

1. На стороне AC треугольника ABC выбраны 500 точек $P_1, P_2, \ldots, P_{500}$. (Каждая точка P_i лежит между A и P_{i+1}, точки выбираются произвольно и могут делить сторону на отрезки различной длины.) Рассматриваются треугольники ABP_1, P_1BP_2, $\ldots$ $P_{499}BP_{500}$, $P_{500}BC$. Какое наибольшее количество равнобедренных может быть среди них?

2. В двух ящиках лежат белые и чёрные шары (в каждом ящике присутствуют шары обоих цветов). Если из каждого ящика вынуть по одному шару, то вероятность того, что они оба окажутся белыми, равна 0.115, а вероятность того, что оба окажутся чёрными — 0.405. В одном из ящиков все чёрные шары перекрасили в белый цвет, а все белые перекрасили в чёрный цвет, после чего из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что эти шары будут одного цвета.

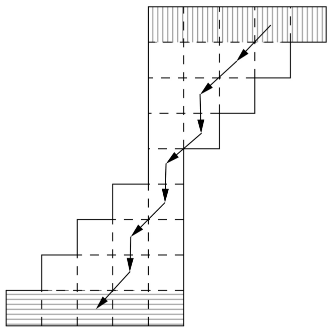
3. В магазине фрукты продаются только в упаковках двух видов: упаковка из 23 яблок и 9 груш стоит 500 рублей, упаковка из 7 яблок и 19 груш стоит 350 рублей. Требуется купить одинаковое (ненулевое) количество яблок и груш. Какую минимальную цену (в рублях) придётся заплатить?

4. Найти количество натуральных чисел $n \leq 10^{12}$ таких, что $\text{НОК}(16, n) = 16n$.

5. Три мотоциклиста едут по кругу с постоянными скоростями, первый и второй — по часовой стрелке, третий — против часовой стрелки, причём скорость второго больше чем скорость первого. Они стартуют одновременно из точки A. В момент, когда второй мотоциклист проехал ровно 7 кругов (т.е. в 7-й раз вернулся в точку A), состоялась его 3-я встреча с первым мотоциклистом и 21-я встреча с третьим. Какая по счёту встреча первого и третьего мотоциклистов произошла в этот момент? (Встречи отсчитываются после начала движения. Пребывание мотоциклистов в точке A в начальный момент времени встречей не считается.)

6. Точка A расположена на параболе $y = x^2$, а точка B — на прямой $y = x - 5.25$. Найти минимальное возможное значение величины AB^2.

7. Приведённая ниже диаграмма состоит из 29 единичных квадратов. Лягушка из каждой клетки может прыгнуть либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку влево-вниз по диагонали (не выходя при этом за границы диаграммы). Сколько существует путей лягушки, начинающихся в одном из квадратов верхнего ряда и заканчивающихся в одном из квадратов нижнего ряда? (На рисунке показан один из путей лягушки. Верхний ряд квадратов выделен вертикальной штриховкой, нижний ряд — горизонтальной штриховкой.)



8. Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках K, L, сторону BC — в точках M, N, сторону AC — в точках R, S.
Дано: $KL = MN = RS = 5$, $AB = 18$, $BC = 24$, $\angle ABC = 90^\circ$. Найти радиус окружности.

9. В выражении $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{13})(1+x^{14})(1+x^{1000})^{18}$ раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

10. В правильном 1007-угольнике $A_1 \dots A_{1007}$ соединены вершины через каждые две, т.е. проведены все диагонали $A_i A_{i+3}$ (считаем $A_{1008} = A_1,\ A_{1009} = A_2$ и т.д.) Обозначим B_i - пересечение диагоналей $A_i A_{i+3}$ и $A_{i+1} A_{i-2}$. Рассмотрим пирамиду, основанием которой является многоугольник
$A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_{1007} B_{1007}$. (На рисунке показан пример такой пирамиды, где изначально вместо 1007-угольника взят 16-угольник.) Какое наибольшее количество сторон может иметь многоугольник, получающийся в сечении этой пирамиды плоскостью?