



**Межрегиональная олимпиада школьников
«Высшая проба»**

2013-2014 учебный год

**ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА по
МАТЕМАТИКЕ**

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: ответом к каждой задаче является целое число или конечная десятичная дробь. В случае нецелого ответа отделяйте дробную часть от целой части точкой.

1. В двух ящиках лежат белые и чёрные шары. Если из каждого ящика вынуть по одному шару, то вероятность того, что они оба окажутся белыми, равна 0.147, а вероятность того, что оба окажутся чёрными - 0.377. В одном из ящиков все чёрные шары перекрасили в белый цвет, а все белые перекрасили в чёрный цвет, после чего из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что эти шары будут одного цвета.

2. Найти наименьшее натуральное $a > 1$, для которого $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ - натуральное число.

3. На стороне AC треугольника ABC выбраны 450 точек P_1, P_2, \dots, P_{450} . (Каждая точка P_i лежит между A и P_{i+1} , точки выбираются произвольно и могут делить сторону на отрезки различной длины.) Рассматриваются треугольники $ABP_1, P_1BP_2, \dots, P_{449}BP_{450}, P_{450}BC$. Какое наибольшее количество равнобедренных может быть среди них?

4. Три мотоциклиста едут по кругу с постоянными, но разными скоростями, первый и второй - по часовой стрелке, третий — против часовой стрелки, причём скорость второго больше, чем скорость первого. Они стартуют одновременно из точки A . В момент, когда второй мотоциклист проехал ровно 8 кругов (т.е. в 8-й раз вернулся в точку A), состоялась его 3-я встреча с первым мотоциклистом и 20-я встреча с третьим. Какая по счёту встреча первого и третьего мотоциклистов произошла в этот момент? (Встречи отсчитываются после начала движения. Пребывание мотоциклистов в точке A в начальный момент времени встречей не считается.)

5. В магазине фрукты продаются только в упаковках двух видов: упаковка из 7 яблок и 17 груш стоит 100 рублей, упаковка из 18 яблок и 4 груш стоит 120 рублей. Требуется купить одинаковое (ненулевое) количество яблок и груш. Какую минимальную цену (в рублях) придётся заплатить?

6. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 - различные корни уравнения $x^4 - 2^{121}x^2 + 121$, идущие в порядке возрастания, т.е. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Найти значение выражения

$$\frac{(11 + x_1)(11 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)}.$$

7. Последовательность T_n определена следующим образом: $T_1 = 2$, $T_n = 2^{T_{n-1}}$ при $n \geq 2$. Найти остаток от деления числа $T_1 + T_2 + \dots + T_{255}$ на 255.

8. Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках K, L , сторону BC — в точках M, N , сторону AC — в точках R, S . Дано: $KL = MN = RS = 1.5$, $AB = 3$, $BC = 4$, $\angle ABC = 90^\circ$. Найти радиус окружности.

9. В выражении $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \dots (1 + x^{2000})$ раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

10. Джек-потрошитель начинает рубить деревья, имея в начальный момент запас энергии, равный 100 единицам. За каждую минуту он может совершить одно из двух действий: либо срубить n деревьев, где n - количество единиц его энергии в начале минуты, и тогда к концу минуты его энергия уменьшается на 1, либо отдохнуть (не срубив за минуту ни одного дерева), и тогда к концу минуты его запас энергии увеличивается на 1.

Какое максимальное количество деревьев может он срубить за 60 минут?