Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба»

2013-2014 учебный год

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА по МАТЕМАТИКЕ

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Могут ли ненулевые числа x, y и z удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 - y, \\ y^2 + y = z^2 - z, \\ z^2 + z = x^2 - x? \end{cases}$$

2. Действительные числа a, b и c таковы, что числа ab, bc, ca — рациональные. Докажите, что существуют такие целые числа x, y, z, что $ax + by + cz = 0$.

3. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке $(11;\ 1)$ пересекает это множество в точках A, B, C и D. Докажите, что все точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т.е. на кривой, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы.

4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая AO пересекает сторону BC в точке P. Точки E и F на сторонах AB и AC соответственно выбираются так, что около четырёхугольника $AEPF$ можно описать окружность. Докажите, что длина проекции отрезка EF на сторону BC не зависит от выбора точек E и F.

5. На плоскости даны восемь различных точек. Нумерацию этих точек числами от 1 до 8 назовём *хорошей*, если выполнено следующее условие:
существует такая прямая, что все точки лежат по одну сторону и на разных расстояниях от неё, и при этом расстояния от точек до этой прямой возрастают с возрастанием номера. Т.е. ближайшая точка — номер 1, следующая по удалённости — номер 2, и т.д.
Какое максимальное количество различных хороших нумераций может быть у заданной восьмёрки точек?

6. Пусть $p > 2$ — целое число, не делящееся на 3. Докажите, что существуют такие целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что

$$-\frac{p}{2} < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < \frac{p}{2},$$

и произведение

$$\frac{p - a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p - a_2}{|a_2|} \cdots \frac{p - a_k}{|a_k|}$$

равно 3^m для некоторого натурального m.

Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба»

2013-2014 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЕРОВ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА по МАТЕМАТИКЕ

Класс	**ПОБЕДИТЕЛИ**	**ПРИЗЕРЫ**	
	Дипломанты 1 степени	Дипломанты 2 степени	Дипломанты 3 степени
	Критерии определения	Критерии определения	Критерии определения
7	от 95 и выше	от 80 до 94	от 60 до 79
8	от 85 и выше	от 70 до 84	от 60 до 69
9	от 95 и выше	от 75 до 94	от 60 до 74
10	от 80 и выше	от 60 до 79	от 50 до 59
11	от 80 и выше	от 60 до 79	от 45 до 59