Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба»

2013-2014 учебный год

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА по МАТЕМАТИКЕ

9 класс

Соотнесение выставленных оценок с баллами

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
+	20	20	20	20	20	20
+.	18	18	18	18	18	18
+/–	16	16	16	16	16	16
+/2	12	12	12	12	12	12
–/+	8	8	8	8	8	8
–.	4	4	4	4	4	4
–	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

9.1. Известно, что ни одно из чисел a, b, c не является целым. Может ли случиться так, что каждое из чисел ab, bc, ca, abc — целое?

Ответ. Может.

Решение. Например, выберем три различных простых числа p_1, p_2, p_3 и рассмотрим числа

$$a = \frac{p_1 p_2}{p_3}, b = \frac{p_1 p_3}{p_2}, c = \frac{p_2 p_3}{p_1},$$

каждое из которых, очевидно, не является целым. Эта тройка удовлетворяет условиям задачи.

Критерии.

(−/+) Приведены некоторые верные рассуждения в направлении построения примера, однако явный пример таких чисел отсутствует,

(+/2) Правильный ответ + небольше продвижения в доказательстве. Явный пример чисел не приведён.

(+/−) Правильный ответ + верное но незаконченное доказательство. Явный пример таких чисел не приведён.

(+) Ответ верный, приведён явный пример или указаны определяющие свойства таких чисел.

9.2. Точка B является серединой отрезка AC. Квадрат $ABDE$ и равносторонний треугольник BCF расположены в одной полуплоскости от прямой AC. Найти (в градусах) величину острого угла между прямыми CD и AF.

Ответ. 75°.

Решение. Заметим, что точки $ADFC$ лежат на одной окружности с центром в точке B. При этом дуга FC равна 60°. Следовательно, угол FAC равен 30° (по теореме о вписанном угле). Треугольник BDC – равнобедренный с прямым углом при вершине B. Поэтому угол DCA равен $\pi/4$. Тогда острый угол между прямыми AF и DC равен $30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

Критерии.

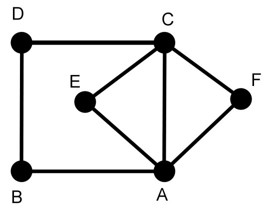
(−.) Продвижения в задаче (нахождение многих равных отрезков и углов) без получения ответа.

(+/2) Правильный ответ, существенные пробелы в обосновании (но без логических ошибок),
или
ошибки, не повлиявшие на ответ.

(+.) Недостаточное обоснование некоторых (несложных) фактов или пропуск некоторых более-менее очевидных шагов,
или
посчитан тупой угол вместо отсрого,
или
незначительная арифметическая ошибка, не повлиявшая на ответ.

(+) Правильный ответ с полным обоснованием и отсутствием ошибок в решении.

9.3. Двое играют в такую игру: на рисунке, изображённом ниже, в точке A стоит фишка. Они ходят фишкой по очереди, с каждым ходом передвигая фишку из точки, в которой она стоит, в одну из названных на рисунке точек, соединенную с нею отрезком. Два раза по одному отрезку ходить нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон? Обоснуйте свой ответ.



Ответ. Выигрывает второй.

Решение. Заметим, что игра должна закончиться в вершине A. Действительно, степень вершины A в начале была 4, в конце стала 0, поэтому изменилась на чётное число, из чего немедленно вытекает, что мы должны закончить именно в ней. Докажем, что к концу игры все рёбра были пройдены. Действительно, из A никаких рёбер остаться не должно. Степени всех вершин были чётны, закончли мы там же, где и закончили, поэтому степени всех вершин остались чётны. Ребра AB нет, поэтому степень вершины B 0, поэтому ребра BD нет, поэтому степень вершины D 0. Аналогично степени вершин E и F 0. Значит, рёбра из C никуда вести не могут, и её степень также 0. Так как всего рёбер чётно, закончит игру второй игрок и выиграет.

Критерии.

- (−.) "Плохой" перебор и ничего не сказано про чётность числа рёбер.
- (−/+) Перебор с небольшим количеством пропущеннных случаев, или сказано о том, что число рёбер чётно.
- (+/2) Сказано о чётности числа рёбер в графе и сказано (но не доказано), что у второго есть ход.
- (+/−) Сказано о чётности вершин и объяснено, почему у второго всегда есть ход.
- (+) Полное решение, (включая полный перебор).

9.4. Прямые, содержащие высоты неравнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке H. I — центр *вписанной* окружности треугольника ABC, O — центр *описанной* окружности треугольника BHC. Известно, что точка I лежит на отрезке OA. Найдите угол BAC.

Ответ. 60°

Решение. Заметим, что точка O лежит на биссекторе (перпендикуляр через середину) отрезка BC. С другой стороны, точка O лежит на биссектрисе угла A. Но две эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности, описанной вокруг треугольника BAC, и делящей дугу BC пополам. Итак, точка O лежит на окружности вокруг треугольника BAC.

Углы при вершинах треугольника BAC мы будем обозначать той же буквой. Рассмотрим равнобедренный треугольник OHC, $OH = OC$. Тогда из замечания о расположении точки O и свойств вписанных углов, сразу получаем, что углы при основании этого равнобедренного треугольника равны $90^\circ - B + A/2$. Аналогично, угол при основании равнобедренного треугольника OHB ($OH = OB$) равен $90^\circ - C + A/2$. Но сумма этих двух углов равна углу BHC, который, в свою очередь, равен углу $180 - A$ (по теореме о вертикальных углах). Следовательно, $180 - B - C + A = 180 - A$, откуда $3A = 180$.

Критерии.

- (−.) Ответ неверный и полного решения нет, но есть существенные продвижения в решении.
- (−/+) Правильный ответ получен, но в решении используется без доказательства, что точка O принадлежит описанной окружности $\triangle ABC$.
- (+/−) Доказано, что точка O лежит на описанной окружности $\triangle ABC$.
- (+.) Ответ неверный изза арифметической ошибки.
- (+) Правильный ответ + полное обоснование.

9.5. Клетки шахматной доски раскрашиваются в 3 цвета — белый, серый и черный — таким образом, чтобы соседние клетки, имеющие общую сторону, отличались цветом, однако резкая смена цвета (то есть соседство белой и черной клеток) запрещена. Найдите число таких раскрасок шахматной доски (раскраски, совпадающие при повороте доски на 90 и 180 градусов считаются разными).

Решение. Чтобы не путать с естественной раскраской шахматной доски, выберем в качестве трех цветов красный, синий и серый. Предположим, что поле **a1** окрашено в серый цвет. Тогда, при наших правилах раскраски, серыми автоматически оказываются все черные поля доски (напомним, что **a1** – черное поле), а на цвет оставшихся тридцати двух (белых) полей имеется единственное ограничение: он должен быть красным или синим. Получаем 2^{32} вариантов раскраски. Если же поле **a1** окрашено в красный или синий цвет, то все белые поля шахматной доски автоматически оказываются серыми при любой раскраске по нашим правилам, а цвет любого из оставшихся тридцати двух (черных) полей доски может быть красным или синим. Еще 2^{32} варианта. Итого $2 \cdot 2^{32} = 2^{33}$.

Критерии.

(+/2) написано или нарисовано, какие клетки должны быть покрашены в серый цвет (не в каких-то частных случаях, а вообще),

(+.) Решение в целом верное и доведённое до ответа, с отстутствием какихлибо недочётов кроме следующих:
упущена половина случаев изза того, что не учтён второй случай расположения серых клеток, ответ в два раза меньше правильного,
или
получен ответ в два раза больше правильного изза того, что вместо двух способов расположения серых клеток рассмотрены четыре,
или
в решении предполагается, что в раскраске должны участвовать все три цвета, изза чего ответ на 2 меньше правильного.

(+) Правильный ответ и верное решение.

9.6. Последовательность a_n строится следующим образом: $a_1,\ a_2$ — произвольные действительные числа, при $n \geq 3$ число a_n равно наименьшему из чисел $|a_i - a_j|$, $1 \leq i < j \leq n-1$. Например, если $a_1 = 6,\ a_2 = \frac{19}{2}$, то получаем последовательность $6,\ \frac{19}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{5}{2},\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\ldots$. При некотором выборе a_1 и a_2 получилась последовательность, в которой $a_{10} = 1$. Найдите наименьшее возможное значение a_3 в такой последовательности.

Решение. Пусть S_n — множество всех чисел $|a_i - a_j|$, $1 \leq i < j \leq n-1,\ \ n \geq 3$. Тогда a_n есть наименьшее число из множества S_n. Поскольку $S_{n-1} \subset S_n$, то $a_{n-1} \geq a_n$, т.е. начиная с a_3 последовательность нестрого убывающая. Следовательно $a_9 \geq a_{10} = 1$. Далее из определения последовательности следует $a_{10} \leq |a_8 - a_9| = a_8 - a_9 \Rightarrow a_8 \geq a_9 + a_{10} \geq 2$. Аналогично $a_7 \geq a_8 + a_9 \geq 2 + 1 = 3,\ \ a_6 \geq a_7 + a_8 \geq 3 + 2 = 5, \ldots, a_3 \geq a_4 + a_5 \geq 8 + 13 = 21$. Это значение достигается, если взять $a_1 = 55,\ a_2 = 34$.

Критерии.

(−.) Строго доказано, что $a_n \geq a_{n+1}$ при $n \geq 3$.

(−/+) Ответ + неполный пример: сказано, что $\min(a_3) = 21$, и для этого случая выписаны все члены последовательности кроме a_1, a_2,

(+/2) ответ+пример (включая $a_1,\ a_2$), обоснования минимальности нет или оно содержит грубые ошибки (например сказано, что в любой такой последовательности каждое число начиная с 3-го равно разности двух предыдущих),

или

доказано, что $a_3 \geq 21$, но при этом без доказательства использовано, что $a_n \geq a_{n+1}$, пример последовательности для $a_3 = 21$ отсутствует,

или

ответ + неполный пример (без $a_1,\ a_2$) + существенные продвижения в обосновании минимальности.

(+/−) Строго без недочётов доказано, что $a_3 \geq 21$, пример отсутствует,

или

ответ + пример (включая $a_1,\ a_2$) + обоснование минимальности с небольшими пробелами.

(+.) Логически верное и законченное решение с отсутствием каких-либо недочётов кроме следующих:

– неполный пример (не выписаны явно $a_1,\ a_2$),

– используется без доказательства тот факт, что $a_n \geq a_{n+1}$ при $n \geq 3$,

– допущена арифметическая ошибка при вычислении a_3.

(+) Строго без недочётов доказано, что $a_3 \geq 21$, и явно выписаны $a_1,\ a_2$, при которых $a_3 = 21$.