Математика **10 класс**

Время выполнения задания: 300 минут.

1. Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения $x^2 - 2y^2 = 2^{x+y}$ и докажите, что других нет.

2. Вдоль берега круглого озера периметром 1,1 км плывут два лосося — один с постоянной скоростью 500 м/мин по часовой стрелке, другой с постоянной скоростью 600 м/мин против часовой стрелки. По краю берега мечется медведь, всегда бегущий вдоль берега со скоростью 70 м/мин в направлении ближайшего к нему лосося. Сколько полных оборотов вокруг озера сделает медведь за сутки и одну минуту?

3. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника с основанием 1, у которого биссектриса, медиана и заключенный между ними отрезок противоположной стороны также образуют равнобедренный треугольник.

4. Сколько существует различных (т. е. не равных друг другу) тупоугольных треугольников с целыми длинами сторон и периметром 33? Обоснуйте свой ответ.

5. Пусть x, y и z – произвольные вещественные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\sqrt{2+x^2} + \sqrt{2+(x-y)^2} + \sqrt{2+(y-z)^2} + \sqrt{2+(2-z)^2}$? Обоснуйте свой ответ.

6. Двое играют в следующую игру. У них есть плитка шоколада, разделенная бороздками, параллельными сторонам плитки, на дольки. Бороздки разбивают плитку на M вертикальных и N горизонтальных полосок. Первый игрок своим ходом ломает плитку вдоль одной из бороздок на две прямоугольные части и отдает их второму. Второй игрок выбирает одну из частей, съедает ее, а другую ломает по бороздке и отдает получившиеся две части первому. Первый игрок съедает одну из полученных частей, а другую ломает и отдает, и все повторяется. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. При каких M и N первый игрок может играть так, чтобы выиграть вне зависимости от действий второго игрока?