10 класс

Для каждой задачи приведено условие, ответ, критерии оценивания и полное решение, а также, в некоторых случаях, достопримечательные решения, придуманные участниками олимпиады. По каждой задаче оценка “0” ставилась в случае отсутствия в чистовике следов работы над задачей и отсылок к черновику, положительная оценка “+” ставилась за полное решение, промежуточные оценки -/. < -/+ < +/3 < +/2 < +/- < +/. ставились за решения с пробелами или ошибками, перечисленными в разделе “критерии”, а отрицательная оценка “-” ставилась за любую работу над задачей, не удовлетворяющую никаким из указанных критериев *(в частности, за ответ без какого-либо обоснования)*. Любые другие знаки оценок, кроме перечисленных выше, означают “-”.

10.1. Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения $x^2 - 2y^2 = 2^{x+y}$ и докажите, что других нет.

Ответ: $(2, 0)$, $(2, -1)$, $(6,\ -4)$, $(4,\ 0)$, $(12,\ -8)$.

Критерии

+/- потеряны 1 или 2 решения из-за непринципиальных (вычислительных) ошибок.

+/- найдены 3-5 решений. Обоснование отсутствия других решений содержит незначительные пробелы.

+/2 найдены 3-5 решений. Обоснование отсутствия других решений содержит незначительные пробелы.

-/+ найдены 2 или 1 решение. Обоснование отсутствия других решений содержит незначительные пробелы.

-/+ найдены 3-5 решения. Обоснование отсутствия других решений неполно.

-/+ не найдено ни одного решения, но приведены рассуждения, сводящие задачу к перебору конечного числа случаев.

-/. найдены 1 или 2 решения. Обоснование отсутствия других решений неполно.

Решение. Заметим, что $x + y \geqslant 0$, поскольку левая часть уравнения — целое число, а значит, и правая часть уравнения должна быть целым числом. В предположении $y = -x$ получаем невыполнимое равенство $-x^2 = 1$. Далее считаем $x + y > 0$.

Рассмотрим два случая: (1) – y делится на 2 в не меньшей степени, чем x, и (2) – в меньшей.

1) В этом случае $x = 2^s u$ и $y = 2^s v$, где s, u и v — целые числа, $s \geqslant 0$, причём u нечётно. Подставляя эти x и y в уравнение, получим:

$$2^{2s}(u^2 - 2v^2) = 2^{2^s(u+v)}.$$

Так как левая часть последнего равенства делится на 2^{2s}, но не на 2^{2s+1}, а правая — на $2^{2^s(u+v)}$, но не на $2^{2^s(u+v)+1}$, получаем равенство степеней: $s = 2^{s-1}(u + v)$. Если $u + v = 1$, то $s = 1$ или $s = 2$. Подставляя предположения в выражения для x и y, в обоих случаях получаем уравнение $u^2 - 4u + 3 = 0$. Оно имеет корни 1 и 3, при $s = 1$ получаем решения $(2, 0)$ и $(6, -4)$, при $s = 2$ – $(4, 0)$ и $(12, -8)$. Если же $u + v > 1$, то $2^{s-1}(u + v) \geqslant 2^s = (1 + 1)^s = 1 + s + \ldots > s$, и равенство не достигается.

2) В этом случае $x = 2^{s+1}u$ и $y = 2^s v$, где s, u и v — целые числа, $s \geqslant 0$, причём v нечётно. Подставляя эти x и y в уравнение, получим:

$$2^{2s+1}(2u^2 - v^2) = 2^{2^s(2u+v)} \qquad (2)$$

Так как левая часть равенства (3) делится на 2^{2s+1}, но не на 2^{2s+2}, а правая — на $2^{2^s(2u+v)}$, но не на $2^{2^s(2u+v)+1}$, получаем равенство степеней: $2s+1=2^s(2u+v)$. Так как в нём слева стоит нечётное число, то $s=0$, и

$$2u+v=1$$

Кроме того, из (3) следует, что $2u^2-v^2=1$. Подставляя сюда $v=1-2u$, находим, что $u=1$. Так как $s=0$, получаем из формул $x=2^{s+1}u$ и $y=2^s(1-2u)$ решение $(2,-1)$.

Для аналогичной задачи 1 из задания 11 класса мы также привели решение, основанное на другой идее.

10.2. Вдоль берега круглого озера периметром 1,1 км плывут два лосося — один с постоянной скоростью 500 м/мин по часовой стрелке, другой с постоянной скоростью 600 м/мин против часовой стрелки. По краю берега мечется медведь, всегда бегущий вдоль берега со скоростью 70 м/мин в направлении ближайшего к нему лосося. Сколько полных оборотов вокруг озера сделает медведь за сутки и одну минуту?

Ответ: 65.

Критерии

`-/.` для конкретного начального положения медведя и рыб приведены прямые вычисления их перемещений на протяжении двух или более оборотов медведя вокруг озера, а затем явно сделано необоснованное (хотя и интуитивно верное) утверждение о том, что средняя скорость обращения медведя вокруг озера приблизительно равна той, которая получилась в этом численном эксперименте. На этом основании получен ответ с точностью до 10%.

Решение. Заметим, что медведь бежит к ближайшему лососю, если и только если он бежит от точки на берегу, равноудаленной от лососей и не отделенной от медведя лососями. Так как обе равноудаленные от лососей точки движутся против часовой стрелки со скоростью $|600-500|/2=50<70$м/мин, то они никогда не догонят медведя, и медведь никогда не окажется в такой точке (кроме, возможно, начального момента). Так как каждая из этих точек за сутки и одну минуту (то есть за $24\cdot 60+1=1441$ минут) пробежит $50\cdot 1441$ метров, то сделает ровно $50\cdot 1441/1100=131/2=65,5$ оборотов вокруг озера. Поэтому медведь, ни разу не пересекший ни одну из этих точек, сделает строго больше 65, но строго меньше 66 оборотов, то есть 65 полных оборотов.

10.3. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника с основанием 1, у которого биссектриса, медиана и заключенный между ними отрезок противоположной стороны также образуют равнобедренный треугольник.

Ответ: 4.

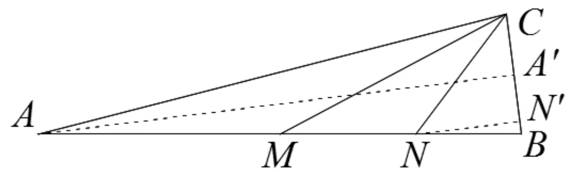
Критерии

`+/.` получен правильный ответ и доказаны некоторые (но не все) из следующих утверждений, необходимых для обоснования единственности ответа: а) Угол маленького треугольника при основании биссектрисы тупой. б) Угол маленького треугольника не при основании не может быть тупым. в) Медиана должна быть основанием маленького равнобедренного треугольника. г) основание медианы лежит между основанием биссектрисы и вершиной большого равнобедренного треугольника, противолежащей к его основанию.

`+/-` получен правильный ответ, но ни одно из вышеперечисленных утверждений (а-г) не доказано.

`+/2` приведен набор тождеств, достаточный для составления уравнения на искомую сторону в предположениях (а-г).

-/+ приведена часть набора тождеств, достаточного для составления уравнения на искомую сторону в предположениях (а-г), либо получено уравнение на искомую сторону в предположениях, отличных от (а-г), и доказано отсутствие решений.



Решение. Так как биссектриса и медиана, опущенные на основание, совпадают, то речь идет о биссектрисе и медиане, опущенной из точки C на боковую сторону AB данного равнобедренного треугольника ABC с основанием BC. Обозначим основания медианы и биссектрисы через M и N соответственно, а искомую длину AB через x.

Рассмотрим два случая: $x > 1$ и $x < 1$ (случай $x = 1$ не подходит, так как в этом случае ABC правильный, и M совпадает с N). Если $x < 1$, то $MB < NB$, потому что $MB/MA = CB/CA = 1/x > 1 = NB/NA$. Также, если $x < 1$, то $\angle CAB > \angle ACB$, поэтому $\angle BNC = \angle BAC + \angle ACN = \angle BAC + \angle ACB/2 > \angle BAC/2 + \angle ACB = 90°$. Аналогично, если $x > 1$, то $MB > NB$ и $\angle BNC < 90°$. Следовательно, в обоих случаях в равнобедренном треугольнике MNC угол N тупой, поэтому равными должны быть остальные два его угла.

При $x < 1$ точка M лежит на отрезке BN, и равнобедренность треугольника MNC с тупым углом N невозможна, так как $\angle NCM < \angle ACB = \angle ABC < \angle AMC$.

При $x > 1$ точка N лежит на отрезке BM, равнобедренность треугольника MNC с тупым углом N означает, что $MB - NB = MN = NC$, и мы найдем x, выразив через него MB, NB и NC. Из $NB/NA = CB/CA$ получим, что $NB = x/(x+1)$, а из $MB/MA = 1$ получим, что $MB = x/2$. Чтобы выразить NC через x, опустим из A и N на BC высоты с основаниями A' и N'. Из подобия прямоугольных треугольников $AA'B$ и $NN'B$ и известного отношения $AB/NB = x+1$ получим, что $BN' = 1/(2x+2)$ и $NN' = \sqrt{4x^2-1}/(2x+2)$. Так как $CN' = 1-BN' = (2x+1)/(2x+2)$, то из теоремы Пифагора для треугольника CNN' получим, что $NC = \sqrt{(2x+1)^2+4x^2-1}/(2x+2)$. Подставляя найденные выражения для MB, NB и NC в равенство $MB - NB = NC$, получим уравнение $x(x-1)^2 = 4(2x+1)$. Раскрыв скобки, получим $x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0$. Так как $x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = (x-4)(x+1)^2$, единственным положительным решением будет $x = 4$.

10.4. Сколько существует различных (т. е. не равных друг другу) тупоугольных треугольников с целыми длинами сторон и периметром 33? Обоснуйте свой ответ.

Ответ: 16.

Критерии

-/. доказано, что тройка чисел $x \geqslant y \geqslant z$ представляет собой длины сторон тупоугольного треугольника, только если удовлетворяет неравенствам $x^2 > y^2 + z^2$ и $x < y + z$.

-/. доказано, что тройка чисел $x \geqslant y \geqslant z$ представляет собой длины сторон искомого треугольника, только если удовлетворяет неравенствам $16 \geqslant x \geqslant 12$ и $x < y + z$.

-/. правильно посчитано количество всех треугольников данного периметра (не только тупоугольных).

-/+ доказано, что тройка чисел $x \geqslant y \geqslant z$ представляет собой длины сторон тупоугольного треугольника, только если удовлетворяет неравенствам $16 \geqslant x \geqslant 12$, $x^2 > y^2 + z^2$

и $x < y + z$ (либо вместо $16 \geqslant x \geqslant 12$ придумано другое ограничение, сводящее перебор к разумному числу вариантов).

-/+ перечислены все искомые треугольники, без обоснования их тупоугольности и отсутствия других.

+/2 доказано, что тройка чисел $x \geqslant y \geqslant z$ представляет собой длины сторон искомого треугольника, только если удовлетворяет неравенствам $16 \geqslant x \geqslant 12$ и $x < y+z$. С помощью этих неравенств перечислены почти все искомые треугольники.

+/2 перечислены все искомые треугольники, обоснована их тупоугольность, но не обосновано отсутствие других треугольников из-за неполноты набора ограничений на длины сторон.

+/- полностью обоснованный ответ с потерей одного треугольника.

+/- перечислены все искомые треугольники, обоснована их тупоугольность, но не обосновано отсутствие других треугольников из-за неполного перебора случаев.

+/. полное решение с незначительным пробелом в обосновании.

Решение. Заметим, что треугольник со сторонами $a \geqslant b \geqslant c$ тупоуголен, если и только если $a^2 > b^2 + c^2$ (в частности, $a > b$). Действительно, если ABC – треугольник со сторонами $a \geqslant b \geqslant c$ против вершин A, B и C соответственно, а $AB'C$ – треугольник с прямым углом $\angle A$ и $AB' = AB$, то B и C лежат по разную сторону от прямой AB', иначе бы в треугольнике CBB' было $\angle CBB' > \angle ABB' = \angle AB'B > \angle BB'C$, и $BC = a < B'C = \sqrt{b^2 + c^2}$. Поэтому из $a^2 > b^2 + c^2$ следует, что $\angle CAB > \angle CAB' = 90°$, обратное доказывается аналогично.

Подсчитаем тройки натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $a > b \geqslant c$, $a^2 > b^2 + c^2$, $a < b + c$ и $a + b + c = 33$. Заметим, что $a + (a + b + c) < (b + c) + 33 \Rightarrow a \leqslant 16$ и $a > (a + b + c)/3 = 11$. Для каждого $a = 12, 13, \ldots, 16$ нужно подсчитать число пар чисел (b, c), таких что $a \geqslant b \geqslant c$, $b + c = 33 - a$ и $b^2 + c^2 < a^2$. Заметим, что если эти условия выполнены для пары чисел (b, c), отличающихся хотя бы на 2, то они выполнены и для пары $(b - 1, c + 1)$, поскольку $(b - 1)^2 + (c + 1)^2 < b^2 + c^2 < a^2$.

При $a = 16$ есть семь пар чисел (b, c), таких что $16 > b \geqslant c$ и $b + c = 17$: это $(15, 2)$, $(14, 3), \ldots,$ $(9, 8)$. Так как $(15, 2)$ удовлетворяет неравенству $b^2 + c^2 < a^2$, то и все семь удовлетворяют.

При $a = 15$ есть шесть пар чисел (b, c), таких что $15 > b \geqslant c$ и $b + c = 18$: это $(14, 4)$, $(13, 5), \ldots,$ $(9, 9)$. Так как $(14, 4)$ удовлетворяет неравенству $b^2 + c^2 < a^2$, то и все шесть удовлетворяют.

При $a = 14$ есть четыре пары чисел (b, c), таких что $14 > b \geqslant c$ и $b + c = 19$: это $(13, 6)$, $(12, 7)$, $(11, 8)$, $(10, 9)$. Первая из них не удовлетворяет неравенству $b^2 + c^2 < a^2$, а вторая удовлетворяет, поэтому и остальные две удовлетворяют.

Аналогично, случаю $a = 13$ соответствуют три пары $(12, 8)$, $(11, 9)$, $(10, 10)$, а случаю $a = 12$ – пара $(11, 10)$, и ни одна из них не удовлетворяет неравенству $b^2 + c^2 < a^2$.

10.5. Пусть x, y и z – произвольные вещественные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\sqrt{2 + x^2} + \sqrt{2 + (x - y)^2} + \sqrt{2 + (y - z)^2} + \sqrt{2 + (2 - z)^2}$? Обоснуйте свой ответ.

Ответ: 6.

Критерии

+/. правильное значение минимума и полное решение с одним из двух недочетов: без обоснования существования минимума, либо с неправильным указанием значений переменных, дающих минимум.

+/- правильный ответ и решение с другим несущественным пробелом в обосновании.

+/2 правильное решение, но ответ неверный.

-/+ неверный ответ и решение с несущественным пробелом в обосновании, либо правильный ответ и неполное решение.

-/. неверный ответ получен в результате содержательной ошибки в решении, либо правильный ответ с верным, но недоказанным утверждением в качестве обоснования.

Решение. Заметим, что указанное в задаче выражение совпадает с длиной ломаной с узлами в точках $(0,0)$, $(\sqrt{2},x)$, $(2\sqrt{2},y)$, $(3\sqrt{2},z)$, $(4\sqrt{2},2)$. Из неравенства треугольника следует, что всякая такая ломанная не короче отрезка, соединяющего концевые точки $(0,0)$ и $(4\sqrt{2},2)$, длина которого равна 6. Если взять $x=1/2$, $y=6$, $z=3/2$, то ломаная целиком окажется на этом отрезке, и её длина совпадёт с 6.

10.6. Двое играют в следующую игру. У них есть плитка шоколада, разделенная бороздками, параллельными сторонам плитки, на дольки. Бороздки разбивают плитку на M вертикальных и N горизонтальных полосок. Первый игрок своим ходом ломает плитку вдоль одной из бороздок на две прямоугольные части и отдает их второму. Второй игрок выбирает одну из частей, съедает ее, а другую ломает по бороздке и отдает получившиеся две части первому. Первый игрок съедает одну из полученных частей, а другую ломает и отдает, и все повторяется. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. При каких M и N первый игрок может играть так, чтобы выиграть вне зависимости от действий второго игрока?

Ответ: Максимальная степень числа 2, на которую делится M, не совпадает с таковой для N.

Критерии

+ правильное решение.

+/- правильный ответ и начало доказательства, включая случай плитки $2n\times(2m+1)$, но не ограничиваясь им.

+/2 разобраны случаи плитки $2n\times(2m+1)$ и $4n\times(4m+2)$.

+/3 доказано, что плитка размера $2n\times(2m+1)$ или $n\times 2n$ – подходящая.

-/+ начато построение разделения всех возможных размеров плиток на выигрышные и проигрышные; либо то же, что +/3, с незначительными недочетами; либо разобран случай плитки $n\times(2n+1)$.

-/. разобрано конечное, большее 3, число нетривиальных случаев, ведущих к выигрышу; либо разобран случай плитки $1\times 2n$.

Решение. Назовем плитку *проигрышной*, если максимальная степень числа 2, на которую делится ее ширина, совпадает с максимальной степенью числа 2, на которую делится ее ширина. Заметим, что проигрышную плитку нельзя разломить на две проигрышных: действительно, если плитка состоит из двух проигрышных частей, то их общая сторона имеет длину $2^s(2k+1)$, а оставшиеся стороны равны $2^s(2m+1)$ и $2^s(2n+1)$, поэтому вся плитка имеет размеры $2^s(2k+1)$ и $2^{s+1}(m+n+1)$ и не является проигрышной.

Если игрок получил проигрышную плитку (в начале игры) или две проигрышные плитки (от соперника), то, какую бы из них он ни съел, при разламывании оставшейся проигрышной хотя бы один из кусков, которые он отдаст сопернику, выйдет непроигрышным (см. замечание выше). Если же игрок получил хотя бы одну непроигрышную плитку (в начале игры или от соперника), то есть плитку размера $2^s(2k+1)$ на $2^t(2m+1)$ при $s>t$, то всегда сможет разломить ее на две проигрышных, отделив от нее кусок размера 2^t на $2^t(2m+1)$. Назовем это правило деления плитки *выигрышным*.

Таким образом, если исходная плитка не проигрышная, то первый игрок каждый ход сможет поступать согласно выигрышному правилу, так что второй игрок всегда будет получать от него только проигрышные плитки, и поэтому будет вынужден отдавать первому игроку хотя бы одну выигрышную. Менее чем через M+N ходов размер максимальной из отдаваемых плиток упадет до 1 на 1, и пара плиток такого размера достанется второму игроку, потому что обе они проигрышные. В этот момент второй игрок проиграет.

Аналогично, если исходная плитка была проигрышная, то первый игрок каждый ход будет отдавать второму хотя бы одну непроигрышную плитку, а второй каждый ход сможет применять выигрышное правило, в результате чего менее чем через M+N ходов пару плиток размера 1 на 1 получит первый игрок и проиграет.

Второй способ. Заметим, что у каждой плитки есть одно из двух свойств. Либо плитка является выигрышной, либо проигрышной. Выигрышная плитка эта плитка, которую можно разломить так, что независимо от действий оппонента она приведет к победе ломающего плитку. Проигрышная - любой разлом ведет к поражению. Выигрышная плитка может быть разломана на две проигрышных. Соответственно, при любом разломе проигрышной хотя бы одна из плиток окажется выигрышной.

Начнем поиск выигрышных плиток. Пусть плитка имеет вид $1 \times m$. Рассмотри выигрышные позиции. Плитка 1×1 проигрышная, 1×2 – выигрышная, 1×3 – проигрышная, 1×4 разбивается на 1×1 и 1×3 и ломающий выигрывает. Если плитка $1 \times m$ проигрышна, то плитка $1 \times (m+1)$ выигрышна, поскольку разбивается на кусочки $1 \times m$ и 1×1. Пусть $1 \times m$ – выигрышная плитка. До m выигрышные и проигрышные плитки чередовались, а значит все выигрышные плитки имеют четное число квадратиков, и m – четно, а $m+1$ – нечетно. Но нечетное число нельзя разбить в сумму двух нечетных, поэтому $m+1$ не разбивается на две проигрышных плитки, значит она проигрышная.

Заметим, что для случая $(2l+1) \times 2k$ работает та же стратегия, что и для случая $1 \times 2k$. Отломим кусочек от стороны $2k$. Второй получит плитки $(2l+1) \times 1$ и $(2l+1) \times (2k-1)$. Первая – проигрышная, поэтому он ломает вторую, но после любого разлома хотя бы одна плитка будет иметь четную сторону. Ее выбирает первый и повторяет действия. Таким образом, с одной стороны, он всегда может сделать ход, описанный стратегией, с другой стороны он никогда не получит две плитки 1×1 поскольку они обе имеют нечетные стороны. Попутно мы доказали, что все плитки вида $(2k+1) \times (2l+1)$ – проигрышные.

Теперь рассмотрим случай, когда обе стороны четны. Пусть плитка размером $n \times m$ выигрышна (проигрышна). Тогда плитка $2n \times 2m$ также является выигрышной (проигрышной).

Докажем это утверждение индукцией по $(m+n)$. База $m+n=2$ и $m+n=3$: плитки $(1,1)$ и $(2,2)$ проигрышные (случай $m+n=2$), а плитки $(1,2)$ и $(2,4)$ выигрышные.

Предположение индукции: пусть для всех $m+n \leq k$ утверждение верно. Докажем для $m+n=k+1$.

Рассмотрим сначала случай выигрышной плитки. Без ограничений можем считать первым ходом, ведущим к победе для плитки $(n \times m)$, отрезание от стороны n кусочка величины x.В таком случае плитка делилась на части $x \times m$ и $(n-x) \times m$ и обе плитки проигрышны. В новой плитке отломим от $2n$ кусочек $2x$, плитка разделится на части размером $2x \times 2m$ и $2(n-x) \times 2m$ они пропорциональны $x \times m$ и $(n-x) \times m$ соответственно, а значит по предположени индукции имеют одинаковые исходы. Плитки $x \times m$ и $(n-x) \times m$ проигрышны, значит и плитки $2x \times 2m$ и $2(n-x) \times 2m$ также проигрышны.

Рассмотрим случай проигрышной плитки. Тогда при любом разломе плитки $m \times n$ одна из плиток пары будет выигрышной. Пусть первый разделил новую плитку на части

$x \times 2m$ и $(2n - x) \times 2m$. Тогда либо x четно и $x = 2x_0$, либо x нечетно. В первом случае получаются плитки, обе стороны которых четны. По предположению инукции исход у них такой же, как и в случае $x_0 \times m$ и $(n - x_0) \times m$. Плитки $x_0 \times m$ и $(n - x_0) \times m$ получаются отламыванием части x_0 от плитки $n \times m$. Плитка $n \times m$ проигрышна, а значит одна из плиток $x_0 \times m$ и $(n - x_0) \times m$ выигрышна. Во втором случае получаются две плитки вида $(2k + 1) \times 2m$, обе они выигрышны. Индуктивный переход доказан.

Пусть первый игрок получает плитку размера $2^{k_1} n \times 2^{k_2} m$, где $k_1 \leq k_2$ и числа m, n нечетны. Исход при игре с такой плиткой совпадает с исходом при игре с плиткой $n \times 2^{k_1 - k_2} m$. Исход для плитки, у которой одна сторона нечетная, определяется четностью второй стороны. Соответственно, если $k_1 = k_2$, то первый проиграет. В остальных случаях, первый выигрывает.