

**Межрегиональная  
многопрофильная  
олимпиада школьников  
ГУ-ВШЭ по математике**

Задания  
для учащихся 10-го класса

10 класс

*В варианте 6 задач, решения всех задач должны быть записаны подробно со всеми вычислениями, объяснениями и доказательствами. Задачи можно решать в любом порядке.*

1. Можно ли на плоскости отметить 2010 точек таким образом, чтобы любой треугольник с вершинами в отмеченных точках был тупоугольным?
2. Имеется  $2n - 2$  доминошки размера  $2 \times 1$ , каждая из которых раскрашена так, что один квадратик — черный, а другой — белый. Из них выкладывается рамка квадратной формы со стороной, длина которой  $n$  квадратиков (рис. 1). Сколько различных черно-белых орнаментов можно выложить таким образом? Орнаменты, совпадающие при повороте квадрата, считаются разными.

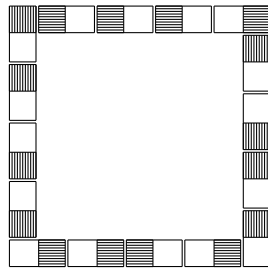


Рис. 1. Рамка из домино со стороной 9.

3. Окружности  $S_1, S_2$  и  $S_3$  с центрами  $O_1, O_2$  и  $O_3$  проходят через точку  $F$ . Известно, что вторая точка пересечения окружностей  $S_2$  и  $S_3$  лежит на прямой  $FO_1$ , а вторая точка пересечения окружностей  $S_1$  и  $S_3$  лежит на прямой  $FO_2$ . Докажите, что вторая точка пересечения окружностей  $S_1$  и  $S_2$  лежит на прямой  $FO_3$ .
4. Докажите, что если  $m$  и  $n$  — различные натуральные числа, то числа  $2^{2^m} + 1$  и  $2^{2^n} + 1$  не имеют общих делителей.
5. Двусторонняя линейка позволяет проводить прямую через две данные точки, а также прямую, параллельную данной, на расстоянии 3см. Разделите отрезок на три равные части при помощи двусторонней линейки, не пользуясь циркулем.
6. На плоскости дана декартова система координат. Существует ли окружность, на которой лежит ровно одна точка с рациональными координатами?