

10 класс

1. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают  $\frac{1}{n}$  – ю часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на  $p$  процентов. Определите исходное процентное содержание соли.

**Решение**

Пусть  $x$  – количество раствора в колбе,  $y$  – процентное содержание соли в растворе.

Тогда  $\frac{x}{100} \cdot y$  – количество соли в колбе.

В пробирку отливают раствор в количестве  $\frac{x}{n}$ . При выпаривании количество соли в пробирке остается неизменным, а количество раствора уменьшится вдвое. Поэтому после переливания раствора обратно в колбу в ней будет то же количество соли, что и раньше, но количество раствора уменьшится на  $\frac{x}{2n}$ .

В результате получаем уравнение  $\frac{x \cdot \frac{y}{100}}{x - \frac{x}{2n}} = \frac{y+p}{100}$ , откуда находим:  $y = (2n - 1) \cdot p$ .

**Ответ:**  $(2n - 1) \cdot p$ .

2. Вдоль шоссе для создания лесополосы выделен участок, координаты которого в декартовой системе удовлетворяют системе неравенств:

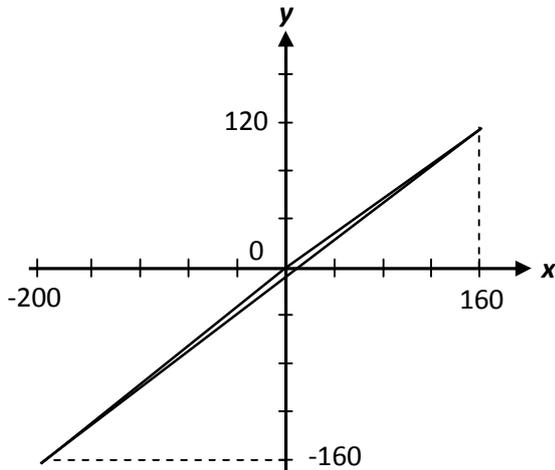
$$\begin{cases} 3x \geq 4y, \\ 4x \geq 5y, \\ 7x - 9y \leq 40. \end{cases}$$

В каждой точке  $(x, y)$  с целыми координатами этого участка предполагается посадить дерево. Определите количество деревьев, которое потребуется для этого.

**Решение**

Если на координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют исходной системе, то получим треугольник с вершинами  $O(0; 0)$ ,  $A(-200; -160)$ ,  $B(160; 120)$ .

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ВОЛГОГРАДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ «ПОЛИТЕХНИК»  
Заключительный этап



Таким образом, становится очевидным, что решить задачу непосредственным подсчетом числа точек с целыми координатами, попавшими в область, практически невозможно. Выберем другой путь.

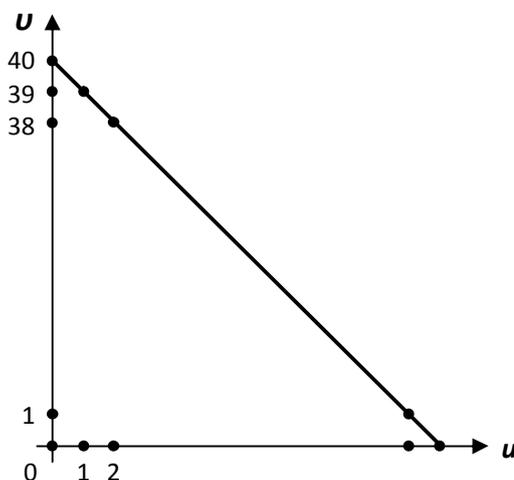
Введем новые переменные  $u$  и  $v$ , положив: 
$$\begin{cases} u = 3x - 4y, \\ v = 4x - 5y. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно  $x$  и  $y$ , получаем: 
$$\begin{cases} x = 4v - 5u, \\ y = 3v - 4u. \end{cases}$$

Заметим, что при указанных преобразованиях каждой паре целых чисел  $(x, y)$  соответствует пара целых чисел  $(u, v)$  и наоборот, каждой паре целых чисел  $(u, v)$  отвечает пара целых чисел  $(x, y)$ . В новых координатах  $u, v$  система неравенств принимает вид:

$$\begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0, \\ u + v \leq 40. \end{cases}$$

Для решения задачи достаточно найти количество пар целых чисел  $(u, v)$ , удовлетворяющих последней системе. Легко видеть, что эта система в плоскости  $Ouv$  определяет треугольник, изображенный на рисунке:



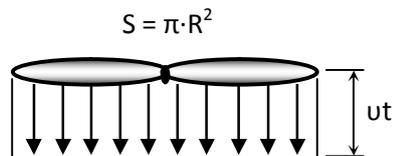
Количество точек с целыми координатами, лежащими внутри, а также на границе треугольника, найдем, используя формулу для суммы  $n$  членов арифметической прогрессии. В результате получим:

$$S = 1 + 2 + \dots + 40 + 41 = \frac{1 + 41}{2} \cdot 41 = 861.$$

**Ответ:** 861.

**3.** Подъемная сила вертолета  $10^4$  Н. В результате ремонта неисправного винта, длины лопастей его сократились на 10 %. Какова новая подъемная сила?

**Решение**



По второму закону Ньютона импульс силы вертолета  $F \cdot t$  за время  $t$  (где  $F$  – подъемная сила) равен импульсу отбрасываемого воздуха  $m \cdot u$ . Масса движущегося вниз воздуха за время  $t$  равна:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot u \cdot t, \text{ где } u \text{ – скорость движения воздуха, } \rho \text{ – плотность, } S = \pi \cdot R^2.$$

$$F \cdot t = \rho \cdot S \cdot u \cdot t \cdot u; \quad F = \rho \cdot S \cdot u^2.$$

Таким образом, сила пропорциональна площади винта  $F \sim S \sim \pi \cdot R^2$ .

$$F_1 = \frac{\rho \cdot u \cdot t \cdot R^2 \cdot u \cdot \pi}{t} = \rho \cdot u^2 \cdot R^2 \cdot \pi.$$

При прочих равных условиях:

$$F_1 \sim R_1^2$$

$$F_2 \sim R_2^2$$

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot R_2}{R_1} = 0,81F_1.$$

**4.** Стальной бензобак автомобиля емкостью 70 л полностью заполнен бензином при температуре 20 °С. После прогрева на солнце бак разогрелся до 50 °С. Сколько бензина вылилось из бака? Коэффициент объемного расширения бензина  $10^{-3} \text{ К}^{-1}$ , коэффициент линейного расширения стали  $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ .

**Решение**

Коэффициент объемного расширения стали в 3 раза больше коэффициента линейного расширения:  $\beta_{\text{ст}} = 3 \alpha_{\text{ст}}$ . Температура бака изменилась на:  $\Delta t = 30 \text{ °С}$ .

Общая формула для объема нагретого тела на  $\Delta t$ :  $V_1 = V_0(1 + \beta_0 \cdot \Delta t)$ ;

$$\Delta V_1 = V_1 - V_0 = V_0 \cdot \beta_0 \cdot \Delta t;$$

$$\Delta V_2 = V_2 - V_0 = V_0 \cdot \beta_{\text{ст}} \cdot \Delta t.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ВОЛГОГРАДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ «ПОЛИТЕХНИК»  
Заключительный этап

Вылился объем бензина, равный  $\Delta V = \Delta V_1 - \Delta V_2 = V_0 \cdot \Delta t(\beta_6 - \beta_{ст}) \approx 2$  литра.

Ответ: 2 л.

5. Если бы все линейные размеры Солнечной системы были пропорционально сокращены так, чтобы среднее расстояние между Солнцем и Землей уменьшилось в миллион раз, то какова была бы продолжительность одного года? Плотность небесных тел остается постоянной.

**Решение**

Вспользуемся вторым законом Ньютона для движения Земли вокруг Солнца:

$$\gamma \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \omega^2 \cdot R; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Из последнего уравнения выражаем период:

$$\gamma \cdot M = \frac{4\pi^2}{T^2} R^3; \quad T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{\gamma \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho}.$$

$$T \sim \sqrt[2]{\frac{R^3}{r^3 \cdot \rho}};$$

если  $\rho = \text{const}$ , то  $T = \text{const}; \quad \frac{R^3}{r^3} = \text{const}.$

**Ответ:** период обращения Земли останется неизменным, равным одному году.

6. Четыре одинаковых источника питания с ЭДС 15 В и внутренним сопротивлением 1 Ом соединены, как показано на рисунке. Найти разность потенциалов между точками 1–2 и 1–3.

**Решение**

Из уравнения закона Ома для замкнутой цепи

$$\text{найдем ток: } I = \frac{4\varepsilon}{4r} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

Вспользовавшись законом Ома для участка

неоднородной цепи, определим разность потенциалов  $\Delta\varphi$ :

$$I \cdot R = \Delta\varphi + \varepsilon; \quad I \cdot r = \Delta\varphi + \varepsilon.$$

Откуда  $\Delta\varphi$  между любыми двумя точками равна:

$$\Delta\varphi = I \cdot r - \varepsilon = \frac{\varepsilon}{r} \cdot r - \varepsilon = 0 \text{ В.}$$

**Ответ:** 0 В.

