8 класс

M1

Решение: Сложив два данных равенства, получим $a+3b+2c=3c+3a$, откуда $c+2a=3b$. Решая систему методом подстановки получим: *a* = *b* = *c*, откуда также следует доказываемое равенство.

M2

Ответ: 81.

Решение: Число однозначно определяется первой (от 1 до 9) и второй (от 0 до 8) цифрами. Всего получается 9×9 вариантов.

M3

Решение: Из условия следует, что числа, записанные в клетках, соседних с центральной, должны быть равны между собой и равны $-5/a$, где a – число, записанное в центральную клетку. Но тогда числа, записанные во все угловые клетки, должны быть равны $-5/(-5/a)=a$. Значит, сумма всех чисел, записанных в клетки квадрата, равна $5a-20/a$. Решая уравнение $5a-20/a=0$ получаем $a=\pm 2$. Оба варианта приводят к расстановкам чисел, удовлетворяющим условиям задачи (см. рис.).

-2	$5/2$	-2
$5/2$	-2	$5/2$
-2	$5/2$	-2

2	$-5/2$	2
$-5/2$	2	$-5/2$
2	$-5/2$	2

M4

Ответ: 25 учеников.

Решение: Пусть в классе x ребят младше Пети, тогда $2x$ ребят старше Пети. Итак, в классе $3x+1$ ребят. Пусть в классе y ребят старше Кати, тогда $3y$ ребят младше Кати. Итак, в классе $4y+1$ ребят. Это означает, что число учеников в классе имеет вид $N=3x+1$ и $N=4y+1$, откуда $N-1=3x$ и $N-1=4y$. Таким образом, число $N-1$ делится и на 3, и на 4, то есть оно делится на 12. Единственное такое число между 19 и 29 – это 24. Значит, $N-1=24$, откуда $N=25$.

M5

Ответ: Нельзя.

Решение: Докажем, что если стираются два числа, среди которых есть нечетное, то среди вновь записанных также будет нечетное число. Действительно, если были стерты два нечетных числа, то их произведение будет нечетно. Если же стираются четное и нечетное число, то их сумма будет нечетна. Итак, поскольку изначально на доске были нечетные числа, то и после любого количества операций стирания и записи на доске будет хотя бы одно нечетное число. Поэтому добиться того, чтобы на доске осталось 2014 четных чисел невозможно.

13.1

M6

Ответ. $\angle ACP = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$.

Решение. Докажем, что $\angle ACP = \frac{1}{2}\angle ABC$. Из параллельности прямых MP и AB следует, что $\angle BPM = \angle PBA = \angle PBM$ (так как BP – биссектриса угла ABC). Отсюда $BM = PM$. Получаем, что медиана PM треугольника BPC равна половине его стороны BC. Значит, треугольник BPC – прямоугольный: $\angle BPC = 90^\circ$. Но тогда $\angle ACP = 90^\circ - \angle PLC = 90^\circ - \angle BLA = \angle ABL = \frac{1}{2}\angle ABC$ (см. рис.). Утверждение доказано. Значит, $\angle ACP = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$.