1.3 Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады

1.3.1 Задания для 11 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Известно, что $\log_c a = 5(\log_b a + \log_c b)$. Найдите $\log_a b + \log_b c$.

2. Известно, что $\log_c b = 4(\log_a b + \log_c a)$. Найдите $\log_b a + \log_a c$.

3. Известно, что $\log_b c = 2(\log_a c + \log_b a)$. Найдите $\log_c a + \log_a b$.

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 2. (2 балла)

1. Координаты двух векторов в пространстве — шесть различных натуральных чисел. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

2. Координаты двух векторов в пространстве — шесть различных нечётных натуральных чисел. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

3. Координаты двух векторов в пространстве — шесть различных чётных натуральных чисел. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ко вводу разрешены цифры

Задача 3. (2 балла)

1. Положительная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1$ и начальному условию $x_1 = 3$. Найдите x_{331}.

2. Положительная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 2$ и начальному условию $x_1 = 2$. Найдите x_{251}.

3. Положительная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 3$ и начальному условию $x_1 = 1$. Найдите x_{331}.

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 4. (3 балла)

1. В классе учатся 20 учеников. У каждого из них спросили, сколько у него друзей в классе. Каждое число n либо прозвучало в ответ ровно n раз, либо не прозвучало вовсе. Какое наибольшее значения может принимать сумма всех названных чисел?

2. В классе учатся 30 учеников. У каждого из них спросили, сколько у него друзей в классе. Каждое число n либо прозвучало в ответ ровно n раз, либо не прозвучало вовсе. Какое наибольшее значения может принимать сумма всех названных чисел?

3. В классе учатся 12 учеников. У каждого из них спросили, сколько у него друзей в классе. Каждое число n либо прозвучало в ответ ровно n раз, либо не прозвучало вовсе. Какое наибольшее значения может принимать сумма всех названных чисел?

Ко вводу разрешены цифры.

Задача 5.(3 балла)

1. Функция $f(x, y)$ такова, что $f(x+y, x-y) = 2f(x, y) = 2f(y, x)$. Известно, что $f(128, 32) = 64000$. Найдите $f(5, -3)$.

2. Функция $f(x, y)$ такова, что $f(x+y, x-y) = 2f(x, y) = 2f(y, x)$. Известно, что $f(224, 32) = 10240$. Найдите $f(-3, 4)$.

3. Функция $f(x, y)$ такова, что $f(x+y, x-y) = 2f(x, y) = 2f(y, x)$. Известно, что $f(128, 32) = 32000$. Найдите $f(5, -3)$.

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 6. (3 балла)

1. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $\sin(x+y+z) = \frac{7}{25}$ и $\cos x \cos y \cos z = \frac{6}{25}$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x$.

Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

2. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $\sin(x+y+z) = \frac{12}{37}$ и $\cos x \cos y \cos z = \frac{5}{37}$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x$.

Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

3. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $\sin(x+y+z) = \frac{9}{41}$ и $\cos x \cos y \cos z = \frac{5}{41}$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x$.

Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления, точка с запятой

Задача 7. (3 балла)

1. Решите уравнение $p^2 + q^2 = r^2 + 6p$ в несоставных натуральных числах. В ответе укажите $p+q+r$. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

2. Решите уравнение $p^2 + q^2 = r^2 + 10p$ в несоставных натуральных числах. В ответе укажите $p+q+r$. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

3. Решите уравнение $p^2 + q^2 = r^2 + 6p + 4q$ в несоставных натуральных числах. В ответе укажите $p+q+r$. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ко вводу разрешены цифры, точка с запятой

Задача 8. (3 балла)

1. Каждую из вершин тетраэдра объёма 108 симметрично отразили относительно точки пересечения медиан противоположной грани. Получившиеся четыре точки образовали новый тетраэдр. Найдите его объём.

2. Каждую из вершин тетраэдра объёма 5,4 симметрично отразили относительно точки пересечения медиан противоположной грани. Получившиеся четыре точки образовали новый тетраэдр. Найдите его объём.

3. Каждую из вершин тетраэдра объёма 216 симметрично отразили относительно точки пересечения медиан противоположной грани. Получившиеся четыре точки образовали новый тетраэдр. Найдите его объём.

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 9. (4 балла)

1. Окружность S_1 пересекает окружность S_2 в точках A и B и касается окружности S_3 в точке X. Общая касательная окружностей S_1 и S_3 пересекает прямую AB в точке C. Также через C проходит прямая YZ, касающаяся окружности S_2 в точке Y и окружности S_3 в точке Z.

Известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $XZ = 2\sqrt{30}$. Найдите XY.

Предполагается, что точки обозначенные разными буквами, не совпадают. Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через запятую или точку с запятой.

2. Окружность S_1 пересекает окружность S_2 в точках A и B и касается окружности S_3 в точке X. Общая касательная окружностей S_1 и S_3 пересекает прямую AB в точке C. Также через C проходит прямая YZ, касающаяся окружности S_2 в точке Y и окружности S_3 в точке Z.

Известно, что $AB = 7$, $AC = 6$, $XZ = 2\sqrt{14}$. Найдите XY.

Предполагается, что точки обозначенные разными буквами, не совпадают. Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через запятую или точку с запятой.

3. Окружность S_1 пересекает окружность S_2 в точках A и B и касается окружности S_3 в точке Z. Общая касательная окружностей S_1 и S_3 пересекает прямую AB в точке C. Также через C проходит прямая XY, касающаяся окружности S_2 в точке X и окружности S_3 в точке Y.

Известно, что $AB = 7$, $BC = 5$, $XZ = 4\sqrt{6}$. Найдите YZ.

Предполагается, что точки обозначенные разными буквами, не совпадают. Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления, точка с запятой

Задача 10. (5 баллов)

1. Найдите общую площадь всех областей на декартовой плоскости, в которых выполняется неравенство

$$\{\max(|x|,|y|)\}^2 + 2\{\max(|x|,|y|)\}[\max(|x|,|y|)] \leqslant 3^{-[\max(|x|,|y|)]}.$$

Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные — дробную.

2. Найдите общую площадь всех областей на декартовой плоскости, в которых выполняется неравенство

$$\{\max(|x|,|y|)\}^2 + 2\{\max(|x|,|y|)\}[\max(|x|,|y|)] \leqslant 4^{-[\max(|x|,|y|)]}.$$

Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные — дробную.

3. Найдите общую площадь всех областей на декартовой плоскости, в которых выполняется неравенство

$$\{\max(|x|,|y|)\}^2 + 2\{\max(|x|,|y|)\}[\max(|x|,|y|)] \leqslant 5^{-[\max(|x|,|y|)]}.$$

Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные — дробную.
Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления