

1.2 Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады

1.2.1 Задания для 11 класса

Задача 1. (1 балл)

1. Найдите наибольшее значение выражения $5 \sin x + 2\sqrt{6} \cos x$.
2. Найдите наибольшее значение выражения $6 \sin x + 2\sqrt{7} \cos x$.
3. Найдите наибольшее значение выражения $7 \sin x + 4\sqrt{2} \cos x$.

Задача 2. (2 балла)

1. Дана функция $f(x) = -x^2 + 4x - 2$. Решите уравнение $f(f(\dots f(x) \dots)) = 2$. Функция f применяется 2018 раз.
2. Дана функция $f(x) = 2x^2 - 12x + 21$. Решите уравнение $f(f(\dots f(x) \dots)) = 3$. Функция f применяется 2018 раз.
3. Дана функция $f(x) = x^2 - 8x + 20$. Решите уравнение $f(f(\dots f(x) \dots)) = 4$. Функция f применяется 2018 раз.

Задача 3. (2 балла)

1. Грани каждого из игральных кубиков одинакового размера пронумерованы натуральными числами от 1 до 6. Из 125 таких кубиков составили кубик $5 \times 5 \times 5$. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на его поверхности?
2. Грани каждого из игральных кубиков одинакового размера пронумерованы натуральными числами от 1 до 6. Из 1000 таких кубиков составили кубик $10 \times 10 \times 10$. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на его поверхности?
3. Грани каждого из игральных кубиков одинакового размера пронумерованы натуральными числами от 1 до 6. Из 216 таких кубиков составили кубик $6 \times 6 \times 6$. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на его поверхности?

Задача 4. (3 балла)

1. Найдите многочлен третьей степени со старшим коэффициентом 1, если известно, что три его корня x_1, x_2, x_3 удовлетворяют равенствам: $\alpha = x_1 + x_2, \beta = x_1 + x_3, \gamma = x_2 + x_3$, где α, β, γ — все корни многочлена $x^3 - 10x^2 + 31x - 29$.

Примеры записи ответа: $x^3 - 2x^2 + 33x - 4$

Знак \wedge обозначает степень. Слагаемые пишите в том же порядке, что и в примере.

2. Найдите многочлен третьей степени со старшим коэффициентом 1, если известно, что три его корня x_1, x_2, x_3 удовлетворяют равенствам: $\alpha = x_1 + x_2, \beta = x_1 + x_3, \gamma = x_2 + x_3$, где α, β, γ — все корни многочлена $x^3 - 12x^2 + 44x - 46$.

Примеры записи ответа: $x^3 - 2x^2 + 33x - 4$

Знак \wedge обозначает степень. Слагаемые пишите в том же порядке, что и в примере.

3. Найдите многочлен третьей степени со старшим коэффициентом 1, если известно, что три его корня x_1, x_2, x_3 удовлетворяют равенствам: $\alpha = x_1 + x_2, \beta = x_1 + x_3, \gamma = x_2 + x_3$, где α, β, γ — все корни многочлена $x^3 - 14x^2 + 58x - 61$.

Примеры записи ответа: $x^3 - 2x^2 + 33x - 4$

Знак \wedge обозначает степень. Слагаемые пишите в том же порядке, что и в примере.

Задача 5. (3 балла)

1. Пусть $f(x)$ — возрастающая непрерывная функция, заданная на отрезке $[0; 2]$, $g(x)$ — её обратная функция, причём $g(x) > f(x)$ при всех положительных x , для которых обе эти функции определены. Также $f(0) = 0$, $f(2) = 1$.

Площадь подграфика $f(x)$ на отрезке $[0; 2]$ равна $\frac{3}{4}$. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x)$ и $g(x)$, а также отрезком, соединяющим точки $(1; 2)$ и $(2; 1)$.

2. Пусть $f(x)$ — возрастающая непрерывная функция, заданная на отрезке $[0; 3]$, $g(x)$ — её обратная функция, причём $g(x) > f(x)$ при всех положительных x , для которых обе эти функции определены. Также $f(0) = 0$, $f(3) = 1$.

Площадь подграфика $f(x)$ на отрезке $[0; 3]$ равна 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x)$ и $g(x)$, а также отрезком, соединяющим точки $(1; 3)$ и $(3; 1)$.

3. Пусть $f(x)$ — возрастающая непрерывная функция, заданная на отрезке $[0; 3]$, $g(x)$ — её обратная функция, причём $g(x) > f(x)$ при всех положительных x , для которых обе эти функции определены. Также $f(0) = 0$, $f(3) = 2$.

Площадь подграфика $f(x)$ на отрезке $[0; 3]$ равна 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x)$ и $g(x)$, а также отрезком, соединяющим точки $(3; 2)$ и $(2; 3)$.

Задача 6. (3 балла)

1. Две окружности равного радиуса пересекаются в точках AB . Прямая l , проходящая через точку B , вторично пересекает окружности в точках C и D . Оказалось, что $AD = BD = 5 + 5\sqrt{2}$, а $\angle CAD = 90^\circ$.

Найдите BC .

2. Две окружности равного радиуса пересекаются в точках AB . Прямая l , проходящая через точку B , вторично пересекает окружности в точках C и D . Оказалось, что $AD = BD = 10 + 10\sqrt{3}$, а $\angle CAD = 120^\circ$.

Найдите BC .

3. Две окружности равного радиуса пересекаются в точках AB . Прямая l , проходящая через точку B , вторично пересекает окружности в точках C и D . Оказалось, что $AD = BD = 12$, а $\angle CAD = 108^\circ$.

Найдите BC .

Задача 7. (3 балла)

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Какую меньшую часть объёма отделяет от него плоскость, проходящая через середину ребра BC , центр грани $CDD_1 C_1$ и точку X на ребре AA_1 такую, что $AH : A_1 X = 1 : 3$?

Ответ дайте в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: $13/81$

2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Какую меньшую часть объёма отделяет от него плоскость, проходящая через середины рёбер AB , BB_1 и $A_1 D_1$?

Ответ дайте в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: $13/81$

3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Какую меньшую часть объёма отделяет от него плоскость, проходящая через середину ребра AD и точки X и Y на ребрах AA_1 и CC_1 такие, что $AX : A_1 X = CY : C_1 Y = 1 : 7$?

Ответ дайте в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: $13/81$

Задача 8. (3 балла)

1. На какую наибольшую степень 5 делится число $7^{1000} - 2^{1000}$? В ответе укажите показатель степени или само число.

2. На какую наибольшую степень 2 делится число $7^{1000} - 3^{1000}$? В ответе укажите показатель степени или само число.

3. На какую наибольшую степень 3 делится число $5^{486} - 2^{486}$? В ответе укажите показатель степени или само число.

Задача 9. (4 балла)

Комментарий: желательно разрешить ко вводу только буквы ABCDabcd

1. Упорядочите эти числа по возрастанию или убыванию:

$$A = 9^{9^9}$$

$$B = 99^9$$

$$C = (9^9)^9$$

$$D = 9!^{9!}$$

Примеры записи ответа: $ABCD$

2. Упорядочите эти числа по возрастанию или убыванию:

$$A = 8!^{8!}$$

$$B = 8^{8^8}$$

$$C = 8^{88}$$

$$D = (8^8)^8$$

Примеры записи ответа: $ABCD$

3. Упорядочите эти числа по возрастанию или убыванию:

$$A = 77^7$$

$$B = 7^{77}$$

$$C = 7^{7^7}$$

$$D = 7!^{7!}$$

Примеры записи ответа: $ABCD$

Задача 10. (5 баллов)

1. Одиннадцать девочек стояли напротив одиннадцати мальчиков. Первые девочка и мальчик пошли навстречу друг другу. Когда они встретились, они пожали друг другу руки, после чего развернулись и пошли в обратном направлении. Сразу за первыми девочкой и мальчиком пошли вторые девочка и мальчик, за ними третьи девочка и мальчик и так далее, пока не вышли последние девочка и мальчик. Двое детей жали друг другу руки при встрече, после чего разворачивались и шли в обратном направлении. Какое количество рукопожатий было совершено?

2. Двенадцать девочек стояли напротив двенадцати мальчиков. Первые девочка и мальчик пошли навстречу друг другу. Когда они встретились, они пожали друг другу руки, после чего развернулись и пошли в обратном направлении. Сразу за первыми девочкой и мальчиком пошли вторые девочка и мальчик, за ними третьи девочка и мальчик и так далее, пока не вышли последние девочка и мальчик. Двое детей жали друг другу руки при встрече, после чего разворачивались и шли в обратном направлении. Какое количество рукопожатий было совершено?

3. Тринадцать девочек стояли напротив тринадцати мальчиков. Первые девочка и мальчик пошли навстречу друг другу. Когда они встретились, они пожали друг другу руки, после чего развернулись и пошли в обратном направлении. Сразу за первыми девочкой и мальчиком пошли вторые девочка и мальчик, за ними третьи девочка и мальчик и так далее, пока не вышли последние девочка и мальчик. Двое детей жали друг другу руки при встрече, после чего разворачивались и шли в обратном направлении. Какое количество рукопожатий было совершено?