1 Открытая олимпиада школьников 2018/2019 уч. год

1.1 Задания с решениями заключительного этапа олимпиады

1.1.1 Задания для 11 класса

1 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 13. Может ли их сумма квадратов также делиться на 13?

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен третьей степени такой, что все его корни положительны, а все корни его производной отрицательны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = -1$ и $a_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+1)$ при $n \geqslant 1$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = \sqrt{15}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна диагонали AC. На меньшей дуге AD описанной окружности треугольника ABD выбрана точка E так, что $AB = AE$. Найдите угол $\angle CED$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 9 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была чётна? (Числа могут повторяться)

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины D, и делит их в отношении $5:1$ (не обязательно от вершины D). Также эта плоскость пересекает прямые AB и AC в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников AEF и ABC.

Задача 8. (5 баллов)

Девочка Катя не любит число 239. Она выписала несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 239 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 30000.

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 11. Может ли их сумма квадратов также делиться на 11?

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен пятой степени такой, что все его корни отрицательны, а все корни его производной положительны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 1$ и $a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + n$ при $n \geqslant 2$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = 4\sqrt{3}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона BC равна диагонали BD. На меньшей дуге AB описанной окружности треугольника ABC выбрана точка E так, что $BC = BE$. Найдите угол $\angle AED$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 7 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была нечётна? (Числа могут повторяться)

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины C, и делит их в отношении $4:1$ (не обязательно от вершины C). Также эта плоскость пересекает прямые AB и BD в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников BEF и ABD.

Задача 8. (5 баллов)

Мальчик Коля не любит число 1234. Он выписал несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 1234 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 400000.

3 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 7. Может ли их сумма квадратов также делиться на 7?

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен третьей степени такой, что все его корни положительны, а все корни его производной отрицательны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+1)$ при $n \geqslant 1$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = \sqrt{35}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD равна диагонали AC. На меньшей дуге BC описанной окружности треугольника BCD выбрана точка E так, что $CD = CE$. Найдите угол $\angle AEB$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 13 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была чётна? (Числа могут повторяться)

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины B, и делит их в отношении $2:1$ (не обязательно от вершины B). Также эта плоскость пересекает прямые CD и AC в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников EFC и ACD.

Задача 8. (5 баллов)

Девочка Маша не любит число 729. Она выписала несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 729 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 30000.

4 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 17. Может ли их сумма квадратов также делиться на 17?

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен пятой степени такой, что все его корни отрицательны, а все корни его производной положительны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 2$ и $a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + n$ при $n \geqslant 2$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{6}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD равна диагонали BD. На меньшей дуге CD описанной окружности треугольника ACD выбрана точка E так, что $AD = DE$. Найдите угол $\angle BEC$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 9 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была нечётна? (Числа могут повторяться)

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины A, и делит их в отношении $3:1$ (не обязательно от вершины A). Также эта плоскость пересекает прямые BC и CD в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников EFC и BCD.

Задача 8. (5 баллов)

Мальчик Антон не любит число 2048. Он выписал несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 2048 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 400000.