1.1.3 Задания для 9 класса

1 вариант

Задача 1. (2 балла)

Два приведённых квадратных трёхчлена отличаются перестановкой свободного члена и второго коэффициента. Сумма этих трёхчленов имеет единственный корень. А какое значение эта сумма принимает в единице?

Ответ: 2 или 18.

Решение:

Пусть эти трёхчлены имеют вид x^2+px+q и x^2+qx+p. Тогда их сумма равна $2x^2+(p+q)x+(p+q)$. Дискриминант этого трёхчлена равен $(p+q)^2-8(p+q)$, откуда $p+q=0$ или $p+q=8$. В первом случае сумма равна 2, а во втором 18.

Ясно, что оба значения достигаются.

Задача 2. (2 балла)

Найдите все натуральные n при которых число n^n-4n+3 простое.

Ответ: Таких чисел нет

Решение:

Можно заметить, что указанное число всегда делится на $n-1$. Это легко доказывается через формулу разности степеней или пользуясь тем обстоятельством, что $n\equiv 1 \pmod{n-1}$. При этом частное тоже больше единицы при $n>2$.

Значит, возможные n, при которых получается просто число — это 2 (единица не подходит, так как по из-за делимости на $n-1$ получаем значение 0). При подстановке двойки получаем результат -1, значит, таких n не существует.

Задача 3. (3 балла)

В стране Налогии каждый платит со своей зарплаты столько процентов налога, сколько тысяч тугриков составляет эта зарплата. Какую зарплату иметь выгоднее всего? (Зарплата измеряется положительным, не обязательно целым числом тугриков)

Ответ: 50 000 тугриков

Решение:

Обозначим зарплату за x. Тогда то, что остаётся после вычета налога, это $x-\dfrac{x^2}{100000}$. Это квадратный трёхчлен с отрицательным старшим коэффициетом, он достигает максимума в вершине при $x=50000$.

Задача 4. (3 балла)

В треугольнике ABC проведена медиана BM, в треугольнике ABM — медиана BN, в треугольнике BNC — медиана NK. Оказалось, что $NK\perp BM$. Найдите $AB:AC$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$

Решение:

Обозначим $\vec{b}=\vec{AB}$ и $\vec{a}=\vec{AC}$.

$\vec{NK}=\vec{AK}-\vec{AN}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\dfrac{\vec{a}}{4}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}$.

$\vec{BM}=\vec{AM}-\vec{AB}=\dfrac{\vec{a}}{2}-\vec{b}$.

$0=\vec{BM}\cdot\vec{NK}=\dfrac{\vec{a}^2-4\vec{b}^2}{8}$, откуда $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$, то есть $AB:AC=\dfrac{1}{2}$.

Задача 5. (3 балла)

Сколькими способами можно в таблице 2×7 расставить натуральные числа от 1 до 14 (каждое по одному разу), чтобы сумма чисел в каждом из семи стобцов была нечётна?

Ответ: $2^7 \cdot (7!)^2$

Решение:

В каждом столбце стоит одно чётное и одно нечётное число. Где стоит чётное число, а где нечётное, выбирается двумя способами, итого 2^7 способов для всей таблицы. Далее, существует $7!$ способов расставить чётные числа по выбранных для них местам и столько же способов расставить нечётные.

Все эти числа надо перемножить.

Задача 6. (3 балла)

В каждой клетке квадрата 2019×2019 проведены обе диагонали. Существует ли замкнутый маршрут, состоящий из этих диагоналей, не проходящий ни по одной из диагоналей дважды и посещающий при этом все клетки квадрата (то есть, содержащий хотя бы одну диагональ из каждой клетки).

Ответ: Нет

Решение:

Раскрасим вершины всех клеток в два цвета в шахматном порядке. Заметим, что каждая диагональ соединяет две вершины одного цвета. Это значит, что с диагоналей одного цвета нельзя попасть на диагонали другого (маршрут должен состоять из диагоналей, а не из их частей, то есть в середине клетки переходить с диагонали на диагональ нельзя)

Из-за нечётности стороны квадрата его угловые вершины квадрата разного цвета. Кроме того, замкнутый маршрут не может зайти в вершину квадрата, так как потом ему оттуда не выбраться. Следовательно, в угловой клетке, в которой лежит чёрный угол квадрата, маршрут может проходить только по диагонали, соединяющей белые вершины и наоборот. Но эти две диагонали, как сказано выше, не могут оказаться в одном маршруте.

Задача 7. (3 балла)

$ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$. Точка K лежит на продолжении луча BC за точку C, $KL \parallel CD$, $\angle CDL = \angle BAD$. Кроме того, $CD = \sqrt{CK \cdot AD}$. O и M — точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $CKLD$ соответственно. Докажите, что $OM \parallel BC$.

Доказательство:

Заметим, в четырёхугольниках $ABCD$ и $DLKC$ совпадают все четыре угла и отношения двух соответствующих сторон, следовательно, они подобны.

При это точка A соответствует точке D, точка O соответствует точке M, точка K соответствует точке C.

Значит, $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{DM}{MC}$, и, следовательно, по теореме Фалеса прямая OM параллельная основаниям трапеции.

Задача 8. (5 балла)

Для каждой пары чисел $\overline{bab}$ и $\overline{abb}$, где a и b — различные цифры, посчитали НОД этих чисел. Найдите наибольший из этих НОД.

$\overline{abb}$ — стандартное обозначение для числа, состоящего из цифр a, b и b именно в таком порядке.

Ответ: 45

Решение:

45 — это наибольший общий делитель числе 585 и 855.

Заметим, что a и b не равны 0, так как числа не могут начинаться с 0.

Предположим, что есть два числа, для которых этот НОД больше 45. Заметим, что $\overline{bab} - \overline{abb} = 90(b - a)$ делится на это НОД. Делимость на 2 и 5 определяется последней цифрой, то есть b, а она не может быть нулём, так что НОД не может быть одновременно чётным и делящимся на 5.

$|a-b| \leqslant 8$, значит, если НОД не делится на 3, он не может быть больше $2|a-b| \leqslant 16$ или $5|a-b| \leqslant 40$ в зависимости от случая, который мы разбираем.

Значит, чтобы НОД был больше 45, он должен делиться на 3, а, значит, исходные числа делятся на 3.

Чтобы число $\overline{bab}$ делилось на 3, числа a и b должны давать одинаковые остатки при делении на 3. Значит, $|a-b|$ принимает значения 3 или 6 а, следовательно, НОД является делителем числа $540 = 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5$, причём по-прежнему не может содержать одновременно 2 и 5. Если нас интересует НОД, больший 45, он должен делиться на 9, и, более того, на 27. Значит, число $\overline{bab}$ делится на 9. При выполнении этого условия, по признаку делимости на 9, цифра a практически однозначно определяет цифру b.

Таким образом, в качестве $\overline{bab}$ имеет смысл рассмотреть только числа 171, 252, 333, 414, 585, 666, 747, 828, 909 и 999 (некоторые из них не подходят, так как $a \neq b$, в частности, 999). Остальные числа разбиваются на две арифметические прогрессии с разностью 81 каждая. По скольку 81 делится на 27, нам достаточно проверить, что 171 и 585 не делятся на 27 и остальные числа также не будут делиться.

Значит, НОД не делится на 27, и 45 — наибольший вариант.

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

Два приведённых квадратных трёхчлена отличаются перестановкой свободного члена и второго коэффициента. Сумма этих трёхчленов имеет единственный корень. А какое значение эта сумма принимает при $x = 2$?

Ответ: 8 или 32.

Решение:

Пусть эти трёхчлены имеют вид $x^2 + px + q$ и $x^2 + qx + p$. Тогда их сумма равна $2x^2 + (p+q)x + (p+q)$. Дискриминант этого трёхчлена равен $(p+q)^2 - 8(p+q)$, откуда $p + q = 0$ или $p + q = 8$. В первом случае сумма равна 8, а во втором 32.

Ясно, что оба значения достигаются.

Задача 2. (2 балла)

Найдите все натуральные n при которых число $n^n - 6n + 5$ простое.

Ответ: Таких чисел нет.

Решение:

Можно заметить, что указанное число всегда делится на $n-1$. Это легко доказывается через формулу разности степеней или пользуясь тем обстоятельством, что $n \equiv 1 \pmod{n-1}$. При этом частное тоже больше единицы при $n > 2$.

Значит, возможные n, при которых получается просто число — это 2 (единица не подходит, так как по из-за делимости на $n-1$ получаем значение 0). При подстановке двойки получаем результат -3, значит, таких n не существует.

Задача 3. (3 балла)

В стране Налогии каждый платит со своей зарплаты столько тысячных частей налога, сколько тугриков составляет эта зарплата. Какую зарплату иметь выгоднее всего? (Зарплата измеряется положительным, не обязательно целым числом тугриков)

Ответ: 500 тугриков

Решение:

Обозначим зарплату за x. Тогда то, что остаётся после вычета налога, это $x - \dfrac{x^2}{1000}$. Это квадратный трёхчлен с отрицательным старшим коэффицетом, он достигает максимума в вершине при $x = 500$.

Задача 4. (3 балла)

В треугольнике ABC проведена медиана BM, в треугольнике MCB — медиана BN, в треугольнике BNA — медиана NK. Оказалось, что $NK \perp BM$. Найдите $AC : BC$.

Ответ: 2

Решение:

Обозначим $\vec{b} = \vec{CB}$ и $\vec{a} = \vec{CA}$.

$\vec{NK} = \vec{CK} - \vec{CN} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \dfrac{\vec{a}}{4} = \dfrac{\vec{a} + 2\vec{b}}{4}$.

$\vec{BM} = \vec{CM} - \vec{CB} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \vec{b}$.

$0 = \vec{BM} \cdot \vec{NK} = \dfrac{\vec{a}^2 - 4\vec{b}^2}{8}$, откуда $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, то есть $AC : BC = 2$.

Задача 5. (3 балла)

Сколькими способами можно в таблице 2×5 расставить натуральные числа от 1 до 10 (каждое по одному разу), чтобы сумма чисел в каждом из пяти стобцов была нечётна?

Ответ: $2^5 \cdot (5!)^2$

Решение:

В каждом столбце стоит одно чётное и одно нечётное число. Где стоит чётное число, а где нечётное, выбирается двумя способами, итого 2^5 способов для всей таблицы. Далее, существует $5!$ способов расставить чётные числа по выбранных для них местам и столько же способов расставить нечётные.

Все эти числа надо перемножить.

Задача 6. (3 балла)

В каждой клетке квадрата 2017×2017 проведены обе диагонали. Существует ли замкнутый маршрут, состоящий из этих диагоналей, не проходящий ни по одной из диагоналей дважды и посещающий при этом все клетки квадрата (то есть, содержащий хотя бы одну диагональ из каждой клетки).

Ответ: Нет

Решение:

Раскрасим вершины всех клеток в два цвета в шахматном порядке. Заметим, что каждая диагональ соединяет две вершины одного цвета. Это значит, что с диагоналей одного цвета нельзя попасть на диагонали другого (маршрут должен состоять из диагоналей, а не из их частей, то есть в середине клетки переходить с диагонали на диагональ нельзя)

Из-за нечётности стороны квадрата его угловые вершины квадрата разного цвета. Кроме того, замкнутый маршрут не может зайти в вершину квадрата, так как потом ему оттуда не выбраться. Следовательно, в угловой клетке, в которой лежит чёрный угол квадрата, маршрут может проходить только по диагонали, соединяющей белые вершины и наоборот. Но эти две диагонали, как сказано выше, не могут оказаться в одном маршруте.

Задача 7. (3 балла)

$ABCD$ — трапеция, $AB \parallel CD$. Точка K лежит на продолжении луча AB за точку B, $KL \parallel BC$, $\angle BCL = \angle ADC$. Кроме того, $BC = \sqrt{BK \cdot CD}$. O и X — точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $KLCB$ соответственно. Докажите, что $OX \parallel AB$.

Доказательство:

Заметим, в четырёхугольниках $ABCD$ и $LKBC$ совпадают все четыре угла и отношения двух соответствующих сторон, следовательно, они подобны.

При это точка D соответствует точке C, точка O соответствует точке M, точка K соответствует точке B.

Значит, $\dfrac{DO}{OK} = \dfrac{CM}{MB}$, и, следовательно, по теореме Фалеса прямая OM параллельная основаниям трапеции.

Задача 8. (5 баллов)

Для каждой пары чисел $\overline{aab}$ и $\overline{aba}$, где a и b — различные цифры, посчитали НОД этих чисел. Найдите наибольший из этих НОД.

$\overline{aab}$ — стандартное обозначение для числа, состоящего из цифр a, a и b именно в таком порядке.

Ответ: 18

Решение:

18 — это наибольший общий делитель числе 828 и 882.

Предположим, что есть два числа, для которых этот НОД больше 18. Заметим, что $\overline{aab} - \overline{aba} = 9(a-b)$ делится на это НОД. $|a-b| \leqslant 9$ так что, чтобы НОД был больше 9, он должен содержать множители как из числа 9, так и из $a-b$. В частности, чтобы НОД был больше 9, он должен делиться на 3, а, значит, исходные числа делятся на 3.

Чтобы число $\overline{aab}$ делилось на 3, числа a и b должны давать одинаковые остатки при делении на 3. Значит, $|a-b|$ принимает значения 3, 6 или 9, а, следовательно, НОД является делителем 27, 54 или 81. Если нас интересует НОД, больший 18, он должен делиться на 9, и, более того, на 27. Значит, число $\overline{aab}$ делится на 9. При выполнении этого условия, по признаку делимости на 9, цифра a практически однозначно определяет цифру b.

Таким образом, в качестве $\overline{aab}$ имеет смысл рассмотреть только числа 117, 225, 333, 441, 558, 666, 774, 882, 990 и 999 (некоторые из них не подходят, так как $a \neq b$, в частности, 999. Остальные числа разбиваются на две арифметические прогрессии с разностью 108 каждая). По скольку 108 делится на 27, нам достаточно проверить, что 117 и 558 не делятся на 27 и остальные числа также не будут делиться.

Значит, НОД не делится на 27. Таким образом 18 — наибольший вариант.

9 класс

1. (2 балла)

Потерян один из ответов — *снимать 1 балл.*

Ответ вычислен с ошибками — *снимать 0,5 балла.*

Не снимать баллы за отсутствие проверки того, что оба значения достигаются.

2. (2 балла)

Не разобраны случаи $n \leqslant 2$ (при необходимости) *1,5 балла.*

В авторском решении не требовать подробного доказательства делимости на $n-1$.

3. (3 балла)

В авторском решении из исследования квадратного трёхчлена автоматически следует, что максимум достигается.

Если из решения участника не следует непосредственно, что максиму достигается, — *снимать 1 балл.*

При наличии арифметических ошибок, несущественно влияющих на ход решения, — *снимать 1 балл.*

4. (3 балла)

Только ответ “Нет” — *0 баллов.*

При наличии арифметических ошибок, несущественно влияющих на ход решения, — *снимать 1 балл.*

5. (3 балла)

Достаточно ответа в виде формулы, вычислять ответ не требуется.

Только ответ без объяснения — *1,5 балла.*

6. (3 балла)

Только ответ “Нет” — *0 баллов.*

7. (3 балла)

Критерии на усмотрение проверяющих.

8. (5 баллов)

Только ответ — *0 баллов.*

Только ответ с примером — *1 балл.*