1.3 Задания 2 тура отборочного этапа олимпиады

1.3.1 Задания для 11 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Известно, что $\log_c a = 5(\log_b a + \log_c b)$. Найдите $\log_a b + \log_b c$.

Ответ: 0,2 || 1/5

2. Известно, что $\log_c b = 4(\log_a b + \log_c a)$. Найдите $\log_b a + \log_a c$.

Ответ: 0,25 || 1/4

3. Известно, что $\log_b c = 2(\log_a c + \log_b a)$. Найдите $\log_c a + \log_a b$.

Ответ: 0,5 || 1/2

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 2. (2 балла)

1. Координаты двух векторов в пространстве — шесть различных натуральных чисел. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 28

2. Координаты двух векторов в пространстве — шесть различных нечётных натуральных чисел. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 73

3. Координаты двух векторов в пространстве — шесть различных чётных натуральных чисел. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ответ: 112

Ко вводу разрешены цифры

Задача 3. (2 балла)

1. Положительная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1$ и начальному условию $x_1 = 3$. Найдите x_{331}.

Ответ: 18

2. Положительная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 2$ и начальному условию $x_1 = 2$. Найдите x_{251}.

Ответ: 22

3. Положительная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1}^2 + x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 3$ и начальному условию $x_1 = 1$. Найдите x_{331}.

Ответ: 31

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 4. (3 балла)

1. В классе учатся 20 учеников. У каждого из них спросили, сколько у него друзей в классе. Каждое число n либо прозвучало в ответ ровно n раз, либо не прозвучало вовсе. Какое наибольшее значения может принимать сумма всех названных чисел?

Ответ: 272.

2. В классе учатся 30 учеников. У каждого из них спросили, сколько у него друзей в классе. Каждое число n либо прозвучало в ответ ровно n раз, либо не прозвучало вовсе. Какое наибольшее значения может принимать сумма всех названных чисел?

Ответ: 650.

3. В классе учатся 12 учеников. У каждого из них спросили, сколько у него друзей в классе. Каждое число n либо прозвучало в ответ ровно n раз, либо не прозвучало вовсе. Какое наибольшее значения может принимать сумма всех названных чисел?

Ответ: 90

Ко вводу разрешены цифры.

Задача 5.(3 балла)

1. Функция $f(x, y)$ такова, что $f(x+y, x-y) = 2f(x, y) = 2f(y, x)$. Известно, что $f(128, 32) = 64000$. Найдите $f(5, -3)$.

Ответ: 125

2. Функция $f(x, y)$ такова, что $f(x+y, x-y) = 2f(x, y) = 2f(y, x)$. Известно, что $f(224, 32) = 10240$. Найдите $f(-3, 4)$.

Ответ: 5

3. Функция $f(x, y)$ такова, что $f(x+y, x-y) = 2f(x, y) = 2f(y, x)$. Известно, что $f(128, 32) = 32000$. Найдите $f(5, -3)$.

Ответ: 125/2 || 62,5

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 6. (3 балла)

1. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $\sin(x+y+z) = \frac{7}{25}$ и $\cos x \cos y \cos z = \frac{6}{25}$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x$.

Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -3; 5 || 5; -3

2. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $\sin(x+y+z) = \frac{12}{37}$ и $\cos x \cos y \cos z = \frac{5}{37}$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x$.

Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -6; 8 || 8; -6

3. Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям $\sin(x+y+z) = \frac{9}{41}$ и $\cos x \cos y \cos z = \frac{5}{41}$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x$.

Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -7; 9 || 9; -7

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления, точка с запятой

Задача 7. (3 балла)

1. Решите уравнение $p^2 + q^2 = r^2 + 6p$ в несоставных натуральных числах. В ответе укажите $p + q + r$. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 6; 10 || 10; 6

2. Решите уравнение $p^2 + q^2 = r^2 + 10p$ в несоставных натуральных числах. В ответе укажите $p + q + r$. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 14; 10 || 10; 14

3. Решите уравнение $p^2 + q^2 = r^2 + 6p + 4q$ в несоставных натуральных числах. В ответе укажите $p + q + r$. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12; 10 || 10; 12

Ко вводу разрешены цифры, точка с запятой

Задача 8. (3 балла)

1. Каждую из вершин тетраэдра объёма 108 симметрично отразили относительно точки пересечения медиан противоположной грани. Получившиеся четыре точки образовали новый тетраэдр. Найдите его объём.

Ответ: 500

2. Каждую из вершин тетраэдра объёма 5,4 симметрично отразили относительно точки пересечения медиан противоположной грани. Получившиеся четыре точки образовали новый тетраэдр. Найдите его объём.

Ответ: 25

3. Каждую из вершин тетраэдра объёма 216 симметрично отразили относительно точки пересечения медиан противоположной грани. Получившиеся четыре точки образовали новый тетраэдр. Найдите его объём.

Ответ: 1000

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления

Задача 9. (4 балла)

1. Окружность S_1 пересекает окружность S_2 в точках A и B и касается окружности S_3 в точке X. Общая касательная окружностей S_1 и S_3 пересекает прямую AB в точке C. Также через C проходит прямая YZ, касающаяся окружности S_2 в точке Y и окружности S_3 в точке Z.

Известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $XZ = 2\sqrt{30}$. Найдите XY.

Предполагается, что точки обозначенные разными буквами, не совпадают. Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через запятую или точку с запятой.

Ответ: 10

2. Окружность S_1 пересекает окружность S_2 в точках A и B и касается окружности S_3 в точке X. Общая касательная окружностей S_1 и S_3 пересекает прямую AB в точке C. Также через C проходит прямая YZ, касающаяся окружности S_2 в точке Y и окружности S_3 в точке Z.

Известно, что $AB = 7$, $AC = 6$, $XZ = 2\sqrt{14}$. Найдите XY.

Предполагается, что точки обозначенные разными буквами, не совпадают. Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через запятую или точку с запятой.

Ответ: 16

3. Окружность S_1 пересекает окружность S_2 в точках A и B и касается окружности S_3 в точке Z. Общая касательная окружностей S_1 и S_3 пересекает прямую AB в точке C. Также через C проходит прямая XY, касающаяся окружности S_2 в точке X и окружности S_3 в точке Y.

Известно, что $AB = 7$, $BC = 5$, $XZ = 4\sqrt{6}$. Найдите YZ.

Предполагается, что точки обозначенные разными буквами, не совпадают. Если возможны несколько вариантов ответа, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления, точка с запятой

Задача 10. (5 баллов)

1. Найдите общую площадь всех областей на декартовой плоскости, в которых выполняется неравенство

$$\{\max(|x|,|y|)\}^2 + 2\{\max(|x|,|y|)\}[\max(|x|,|y|)] \leqslant 3^{-[\max(|x|,|y|)]}.$$

Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные — дробную.

Ответ: 6

2. Найдите общую площадь всех областей на декартовой плоскости, в которых выполняется неравенство

$$\{\max(|x|,|y|)\}^2 + 2\{\max(|x|,|y|)\}[\max(|x|,|y|)] \leqslant 4^{-[\max(|x|,|y|)]}.$$

Ответ: 16/3

Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные — дробную.

3. Найдите общую площадь всех областей на декартовой плоскости, в которых выполняется неравенство

$$\{\max(|x|,|y|)\}^2 + 2\{\max(|x|,|y|)\}[\max(|x|,|y|)] \leqslant 5^{-[\max(|x|,|y|)]}.$$

Ответ: 5

Квадратные скобки обозначают целую часть числа, фигурные — дробную.

Ко вводу разрешены цифры, точка или запятая, знак деления