Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

9 класс

1 вариант

1. (2 балла) Среди шести различных квадратных трёхчленов, отличающихся перестановкой коэффициентов, какое наибольшее количество может не иметь корней?

2. (3 балла) На клетчатой доске 10×10 расположены 400 фишек. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек?

3. (3 балла) Равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со стороной 10 вписаны в одну и ту же окружность так, что точка A_1 лежит на дуге BC, а точка B_1 лежит на дуге AC. Найдите $AA_1^2+BC_1^2+CB_1^2$.

4. (3 балла) Докажите, что в прямоугольном треугольнике площадь не превосходит квадрата периметра, разделённого на 23.

5. (3 балла) Решите уравнение $x^2 + 3y^2 = 2^z$ в натуральных числах.

6. (4 балла) Даны три окружности радиусов 3, 4 и 5, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C. Найдите сумму расстояний от центра описанной окружности треугольника ABC до его сторон.

7. (4 балла) На плоскости дан набор точек, известно что любые три можно параллельным переносом переместить в квадрат с вершинами $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ и $(-2, 0)$. Тогда можно одним параллельным переносом переместить туда сразу все.

8. (4 балла) На 23 февраля мальчику Жене подарили шоколадку размером 3×3, на каждом кусочке которой нарисована картинка, каждая картинка встречается всего один раз. За каждый ход Женя может откусить один кусочек, у которого не более трех общих сторон с другими, ещё не съеденными, кусочками. Сколькими способами Женя может съесть свою шоколадку?

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

9 класс

2 вариант

Решения

1. (2 балла) Среди шести различных квадратных трёхчленов, отличающихся перестановкой коэффициентов, какое наибольшее количество может иметь по два различных корня?

2. (3 балла) На клетчатой доске 8×8 расположены 256 фишек. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек?

3. (3 балла) Равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со стороной 12 вписаны в окружность S так, что точка A лежит на дуге B_1C_1, а точка B лежит на дуге A_1B_1. Найдите $AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2$.

5. (3 балла) Решите уравнение $x^2+y^2 = 2^z$ в натуральных числах.

6. (4 балла) Даны три окружности радиусов 3, 5 и 7, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C. Найдите сумму расстояний от центра описанной окружности треугольника ABC до его сторон.

7. (4 балла) На плоскости дан набор точек, известно что любые три можно параллельным переносом переместить в прямоугольник с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ и $(1,2)$. Тогда можно одним параллельным переносом переместить туда сразу все.

8. (4 балла) На 23 февраля мальчику Жене подарили шоколадку размером 2×4, на каждом кусочке которой нарисована картинка, каждая картинка встречается всего один раз. За каждый ход Женя может откусить один кусочек, у которого не более двух общих сторон с другими, ещё не съеденными, кусочками. Сколькими способами Женя может съесть свою шоколадку?