Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

9 класс

1 вариант

Решения

1. (2 балла) Среди шести различных квадратных трёхчленов, отличающихся перестановкой коэффициентов, какое наибольшее количество может не иметь корней?

Ответ: 6

Решение:

Рассмотим, например, коэффициенты 1000, 1001, 1002. Квадрат любого из них, очевидно, меньше учетверённого произведения двух других, поэтому все дискриминанты будут отрицательны.

2. (3 балла) На клетчатой доске 10×10 расположены 400 фишек. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек?

Ответ: Нет, не при любой.

Решение: Раскрасим доску в шахматном порядке. Количество фишек на чёрных клетках изменяется каждый раз на 4, то есть, в частности, не меняет свою чётность. В конце количество фишек на чёрных клетках должно быть чётно, значит, если в начале их количество нечётно, то ничего не получится.

Также для этой задачи подходят более сложные решения, аналогичные решениям задачи номер 5 десятого класса.

3. (3 балла) Равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со стороной 10 вписаны в одну и ту же окружность так, что точка A_1 лежит на дуге BC, а точка B_1 лежит на дуге AC. Найдите $AA_1^2+BC_1^2+CB_1^2$.

Ответ: 200

Решение:

Заметим, что дуги AB_1, BA_1 и CC_1 равны. Обозначим их градусную меру за 2α. Тогда длины дуг $AC_1 = BB_1 = CA_1 = 120^\circ - 2\alpha$.

По теореме синусов в треугольнике ACA_1 получаем $\dfrac{AA_1}{\sin ACA_1} = \dfrac{AC}{AA_1C}$, откуда $AA_1 = \dfrac{12\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin 60^\circ}$.

Аналогично $BB_1 = \dfrac{10\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin 60^\circ}$ и $CC_1 = \dfrac{12\sin\alpha}{\sin 60^\circ}$.

$$AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = \frac{10^2}{\sin^2 60^\circ}\left(\sin^2(60^\circ+\alpha) + \sin^2(60^\circ-\alpha) + \sin^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{200}{3}\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2 + \sin^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{200}{3}(3\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha) = 200.$$

4. (3 балла) Докажите, что в прямоугольном треугольнике площадь не превосходит квадрата периметра, разделённого на 23.

Решение:

Пусть стороны треугольника имеют длины x и y. Тогда периметр $P = x + y + \sqrt{x^2+y^2}$. По неравенствам о средних получаем $x + y + \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 2\sqrt{xy} + \sqrt{2}\sqrt{xy}$. Так как площадь $S = \frac{xy}{2}$, мы плолучаем $P \geqslant (2+\sqrt{2})xy$, откуда $P^2 \geqslant (6+4\sqrt{2})xy = (12+8\sqrt{2})S > 23S$.

5. (3 балла) Решите уравнение $x^2 + 3y^2 = 2^z$ в натуральных числах.

Ответ: $x = y = 2^n$, $z = 2n+2$, где n — целое неотрицательное число.

Решение:

Заметим, что 2^z при натуральны всегда чётно, поэтому x и y одной чётности.

Рассмотрим сначала случай, когда оба эти числа нечётны. В таком случае сумма их квадратов даёт остаток 4 при делении на 8. Это значит, что $2^z = 4$, то есть $x = y = 1$, $z = 2$.

Если же x и y чётны, то x^2 и y^2 делятся на 4. Сократим каждое слагаемое на 4, получим уравнением в натуральных числах $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 2^{z-2}$.

Сокращая на 4 мы рано или поздно приходим к первой ситуации, когда x и y нечётны. Значит, общее решение имеет вид $x = y = 2^n$, $z = 2n + 2$.

6. (4 балла) Даны три окружности радиусов 3, 4 и 5, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C. Найдите сумму расстояний от центра описанной окружности треугольника ABC до его сторон.

Ответ: $\dfrac{5}{\sqrt{14}} + \dfrac{5}{\sqrt{21}} + \dfrac{5}{\sqrt{30}}$.

Решение:

Введём следующие обозначения: у первой окружности: центр — точка O_1, радиус равен a; у второй окружности: центр — точка O_2, радиус равен b; у третьей окружности: центр — точка O_3, радиус равен c. Так как точки A, B, C являются точками касания двух окружностей из трех, то эти точки лежат на отрезках O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3. Не теряя общности, можно считать, что точка A лежит на отрезке O_2O_3, точка B — на O_1O_3, точка C — на O_1O_2. Центр описанной окружности треугольника ABC обозначим за O.

Стороны треугольника $O_1O_2O_3$ равны 7, 8 и 9. Точки A, B и C делят стороны треугольника $O_1O_2O_3$ так же, как должны делить точки касания вписанной окружности, значит, это они и есть. Таким образом, описанная окружность треугольника ABC — это вписанная окружность треугольника $O_1O_2O_3$. Посчитаем её радиус, поделив площадь треугольника $O_1O_2O_3$, вычисленную по формуле Герона, на её полупериметр: $r = \dfrac{\sqrt{12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}}{12} = \sqrt{5}$.

Треугольники O_1BC и OBC равнобедренные с основанием BC, точки O и O_1 лежат не серединном перпендикуляре к ВС. Тогда по теореме Пифагора получаем $OO_1 = \sqrt{BO^2 + BO_1^2} = \sqrt{5 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Обозначим середину BC за M_1. В прямоугольном треугольнике OBO_1 эта точка — основание высоты, опущенной из прямого угла, откуда $O_1M_1 = \dfrac{BO_1^2}{OO_1} = \dfrac{9}{\sqrt{14}}$, соответственно, $OM_1 = OO_1 - O_1M_1 =$
$= \sqrt{14} - \dfrac{9}{\sqrt{14}} = \dfrac{5}{\sqrt{14}}$.

Аналогично находим $OO_2 = \sqrt{5 + 4^2} = \sqrt{21}$, а $OM_2 = \dfrac{5}{\sqrt{21}}$; $OO_3 =$
$\sqrt{5 + 5^2} = \sqrt{30}$, а $OM_2 = \dfrac{5}{\sqrt{30}}$.

7. (4 балла) На плоскости дан набор точек, известно что любые три можно параллельным переносом переместить в квадрат с вершинами $(0,2)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ и $(-2,0)$. Тогда можно одним параллельным переносом переместить туда сразу все.

Решение:

Введём систему координат, в которой оси абсцисс и ординат будут под углом 45° к текущим, а начало координат будет в той же точке. Вершины квадрата в этой системе будут иметь координаты $(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$.

Рассмотрим самую левую точку (т.е. точку с самой маленькой абсциссой) и самую правую. Проведём через них вертикальные прямые. Расстояние между этими прямыми не больше $2\sqrt{2}$, иначе две крайние точки нельзя переместить в указанный квадрат. Затем проведём горизонтальные прямые через самую верхнюю и самую нижнюю точки. Аналогично расстояние между ними не больше$2\sqrt{2}$.

Эти четыре прямые образуют квадрат со сторонами, параллельными (новым) осям координат, размеры которого не превосходят соответствующих размеров квадрата из условия. Значит, этот квадрат. вместе со всеми лежащими в нём точками, можно переместить в квадрат из условия.

8. (4 балла) На 23 февраля мальчику Жене подарили шоколадку размером 3×3, на каждом кусочке которой нарисована картинка, каждая картинка встречается всего один раз. За каждый ход Женя может откусить один кусочек, у которого не более трех общих сторон с другими, ещё не съеденными, кусочками. Сколькими способами Женя может съесть свою шоколадку?

Ответ: $\frac{4}{5} \cdot 9! = 290304$.

Решение:

Если бы у Жени не было бы ограничения, он мог бы есть кусочки в любом порядке и у него было бы $9! = 362880$ способов.

Не подходят те способы, в которых центральная клетка съедена раньше любой из соседних с ней четырёх. Поскольку из этих пяти клеток для каждой равное количество вариантов в которых она находится раньше других, нам не подходит каждый пятый вариант. Отстаётся $\frac{4}{5} \cdot 9! = 290304$.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

9 класс

2 вариант

Решения

1. (2 балла) Среди шести различных квадратных трёхчленов, отличающихся перестановкой коэффициентов, какое наибольшее количество может иметь по два различных корня?

Ответ: 6

Решение: Возьмём, например, коэффициенты, -5, 1, 2.

Если число -5 это старший коэффициент или свободный член, уравнение очевидно имеет два корня разных знаков.

Для случая, когда -5 — второй коэффициент, посчитаем дискриминант: $5^2 - 1 \cdot 2 = 23 > 0$.

2. (3 балла) На клетчатой доске 8×8 расположены 256 фишек. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек?

Ответ: Нет, не при любой.

Решение: Раскрасим доску в шахматном порядке. Количество фишек на чёрных клетках изменяется каждый раз на 4, то есть, в частности, не меняет свою чётность. В конце количество фишек на чёрных клетках должно быть чётно, значит, если в начале их количество нечётно, то ничего не получится.

Также для этой задачи подходят более сложные решения, аналогичные решениям задачи номер 5 десятого класса.

3. (3 балла) Равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ со стороной 12 вписаны в окружность S так, что точка A лежит на дуге B_1C_1, а точка B лежит на дуге A_1B_1. Найдите $AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2$.

Ответ: 288

Решение:

Заметим, что дуги AB_1, BA_1 и CC_1 равны. Обозначим их градусную меру за 2α. Тогда длины дуг $AC_1 = BB_1 = CA_1 = 120^\circ - 2\alpha$.

По теореме синусов в треугольнике ACA_1 получаем $\dfrac{AA_1}{\sin ACA_1} = \dfrac{AC}{AA_1C}$, откуда $AA_1 = \dfrac{12\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin 60^\circ}$.

Аналогично $BB_1 = \dfrac{12\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin 60^\circ}$ и $CC_1 = \dfrac{12\sin\alpha}{\sin 60^\circ}$.

$$AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2 = \frac{12^2}{\sin^2 60^\circ}\left(\sin^2(60^\circ+\alpha)+\sin^2(60^\circ-\alpha)+\sin^2\alpha\right) =$$
$$= 96\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2+\sin^2\alpha\right) =$$
$$= 96(3\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha) = 288.$$

4. (3 балла) Докажите, что в прямоугольном треугольнике площадь не превосходит квадрата полупериметра, разделённого на 5 с половиной.

Решение:

Пусть стороны треугольника имеют длины x и y. Тогда полупериметр $p = \dfrac{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}{2}$. По неравенствам о средних получаем $\dfrac{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \geqslant \sqrt{xy}+\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}}$. Так как площадь $S = \frac{xy}{2}$, мы получаем $p \geqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)xy$, откуда $p^2 \geqslant \left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)xy = (3+2\sqrt{2})S > 5,5S$.

5. (3 балла) Решите уравнение $x^2+y^2 = 2^z$ в натуральных числах.

Ответ: $x = y = 2^n$, $z = 2n+1$, где n — целое неотрицательное число.

Решение:

Заметим, что 2^z при натуральны всегда чётно, поэтому x и y одной чётности.

Рассмотрим сначала случай, когда оба эти числа нечётны. В таком случае сумма их квадратов даёт остаток 2 при делении на 4. Это значит, что $2^z = 2$, то есть $x = y = z = 1$.

Если же x и y чётны, то x^2 и y^2 делятся на 4, откуда 2^z делится на 4. Сократим каждое слагаемое на 4, получим уравнением в натуральных числах $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 2^{z-2}$.

Сокращая на 4 мы рано или поздно приходим к первой ситуации, когда x и y нечётны. Значит, общее решение имеет вид $x = y = 2^n$, $z = 2n + 1$.

6. (4 балла) Даны три окружности радиусов 3, 5 и 7, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C. Найдите сумму расстояний от центра описанной окружности треугольника ABC до его сторон.

Ответ: $\dfrac{7}{4} + \dfrac{7}{3\sqrt{6}} + \dfrac{7}{\sqrt{30}}$.

Решение:

Введём следующие обозначения: у первой окружности: центр — точка O_1, радиус равен a; у второй окружности: центр — точка O_2, радиус равен b; у третьей окружности: центр — точка O_3, радиус равен c. Так как точки A, B, C являются точками касания двух окружностей из трех, то эти точки лежат на отрезках O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3. Не теряя общности, можно считать, что точка A лежит на отрезке O_2O_3, точка B — на O_1O_3, точка C — на O_1O_2. Центр описанной окружности треугольника ABC обозначим за O.

Стороны треугольника $O_1O_2O_3$ равны 8, 10 и 12. Точки A, B и C делят стороны треугольника $O_1O_2O_3$ так же, как должны делить точки касания вписанной окружности, значит, это они и есть. Таким образом, описанная окружность треугольника ABC — это вписанная окружность треугольника $O_1O_2O_3$. Посчитаем её радиус, поделив площадь треугольника $O_1O_2O_3$, вычисленную по формуле Герона, на её полупериметр: $r = \dfrac{\sqrt{15 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}}{15} = \sqrt{7}$.

Треугольники O_1BC и OBC равнобедренные с основанием BC, точки O и O_1 лежат не серединном перпендикуляре к BC. Тогда по теореме Пифагора получаем $OO_1 = \sqrt{BO^2 + BO_1^2} = \sqrt{7 + 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

Обозначим середину BC за M_1. В прямоугольном треугольнике OBO_1 эта точка — основание высоты, опущенной из прямого угла, откуда $O_1M_1 = \dfrac{BO_1^2}{OO_1} = \dfrac{9}{4}$, соответственно, $OM_1 = OO_1 - O_1M_1 = = 4 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{7}{4}$.

Аналогично находим $OO_2 = \sqrt{5 + 5^2} = \sqrt{30}$, а $OM_2 = \dfrac{7}{\sqrt{30}}$;

$OO_3 = \sqrt{5+7^2} = \sqrt{54}$, а $OM_2 = \dfrac{7}{\sqrt{54}} = \dfrac{7}{3\sqrt{6}}$.

7. (4 балла) На плоскости дан набор точек, известно что любые три можно параллельным переносом переместить в прямоугольник с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ и $(1,2)$. Тогда можно одним параллельным переносом переместить туда сразу все.

Решение:

Рассмотрим самую левую точку (т.е. точку с самой маленькой абсциссой) и самую правую. Проведём через них вертикальные прямые. Расстояние между этими прямыми не больше 2, иначе 2 крайние точки нельзя переместить в указанный прямоугольник. Затем проведём горизонтальные прямые через самую верхнюю и самую нижнюю точки. Аналогично расстояние между ними не больше 1.

Эти четыре прямые образуют прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, размеры которого не превосходят соответствующих размеров прямоугольника из условия. Значит, этот прямоугольник. вместе со всеми лежащими в нём точками, можно переместить в прямоугольник из условия.

8. (4 балла) На 23 февраля мальчику Жене подарили шоколадку размером 2×4, на каждом кусочке которой нарисована картинка, каждая картинка встречается всего один раз. За каждый ход Женя может откусить один кусочек, у которого не более двух общих сторон с другими, ещё не съеденными, кусочками. Сколькими способами Женя может съесть свою шоколадку?

Ответ: 6720.

Решение:

Первой обязательно съедается угловая клетка (4 способа). После этого есть 4 варианта:

1) Второй съедается соседняя угловая клетка (1 способ). Остаётся прямоугольник 2×3. Из него первой съедается снова угловая клетка (4 способа). После этого остаётся одна недоступная для съедения клетка.

1.1) Четвёртой съедается единственная клетка, не соседняя с недоступной (1 способ). Далее съедается клетка, соседняя с недоступной (3 способа). Остальные 3 клетки съедаются в любом порядке ($3!$ способов). Итого $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3! = 288$ способов.

1.2) Четвёртой съедается клетка, соседняя с недоступной (3 способа). Остальные 4 клетки съедаются в любом порядке (4! способов). Итого $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4! = 1152$ способа.

Итого в сумме 1440 способов для случай 1).

2) Второй съедается соседняя неугловая клетка (1 способ). После этого остаётся одна недоступная для съедения клетка, у которой три соседних.

2.1) Третьей съедается одна из трёх клеток рядом с недоступной (3 способа). Далее становятся доступными все клетки, которые можно съесть 5! способами. Итого $4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5! = 1440$.

2.2) Третьей съедается клетка, не соседняя с недоступной (2 способа).

2.2.1) Четвёртой съедается одна из трёх клеток рядом с недоступной (3 способа). Далее становятся доступными все клетки, которые можно съесть 4! способами. Итого $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4! = 576$ способов.

2.2.2) Четвёртой съедается клетка, не соседняя с недоступной (1 способ). Затем съедается одна из клеток, соседних с недоступной (3 способа). Далее становятся доступными все клетки, которые можно съесть 3! способами. Итого $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3! = 144$ способа.

Итого в сумме 2160 способов для случа 2).

3) Второй съедается угловая клетка на той же длинной стороне, что и уже съеденная. После этого остаётся две недоступные для съедения клетки, у которой три соседних. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю 1). В итоге те же самые 1440 способов.

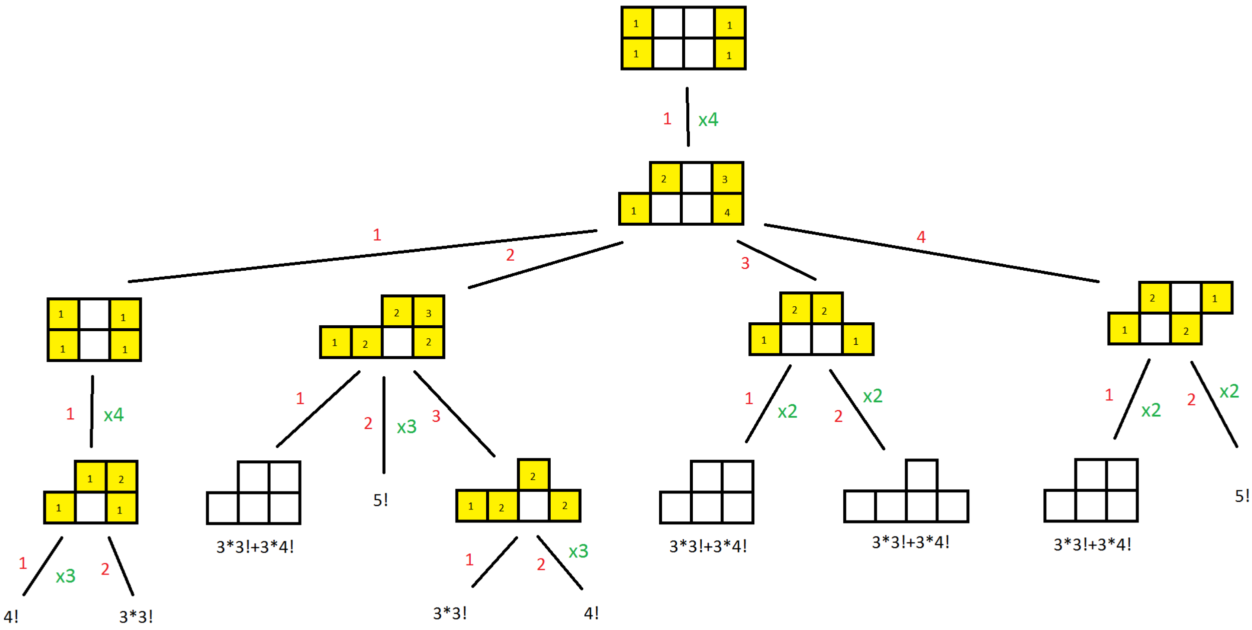
4) Второй съедается клетка, противоположная съеденной (1 способов).

4.1)Если после этого мы съедаем угловую клетку, у нас остаётся фигура, та же, что и в случае 1), съесть которую $cdot3 \cdot 4! + cdot3 \cdot 3!$ способов. Это число надо умножить на 8 и получается 720 способов.

4.2) Если съедается не угловая клетка, все клетки становятся доступны, и их можно съесть 5! способами. Итого $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5! = 960$ способов.

Всего для варианта 4) получается 1680 способов.

Итого 6720 способов.



4*(4*(3*4!+3*3!)+(90+3*5!+(3*3!+3*4!))+(2*90+2*90)+(2*90+2*5!)) =1440+2160+1440+1680=6720