

## 9 класс, I отборочный тур.

### Задача 1. (1 балл)

1. Из отрезков с длинами  $4a$ ,  $4a + 9$  и  $a^2$  можно составить треугольник. Найдите все возможные значения  $a$ .

Ответ запишите в виде промежутка (квадратные скобки означают, что граница входит в множество решений неравенства, круглые — что не входит).

Ответ: (3; 9)

2. Из отрезков с длинами  $3a$ ,  $3a + 16$  и  $a^2$  можно составить треугольник. Найдите все возможные значения  $a$ .

Ответ запишите в виде промежутка (квадратные скобки означают, что граница входит в множество решений неравенства, круглые — что не входит).

Ответ: (4; 8)

3. Из отрезков с длинами  $12a$ ,  $12a + 25$  и  $a^2$  можно составить треугольник. Найдите все возможные значения  $a$ .

Ответ запишите в виде промежутка (квадратные скобки означают, что граница входит в множество решений неравенства, круглые — что не входит).

Ответ: (5; 25)

### Примеры записи ответов:

[-4; 5)

(-4; 5]

(-4; 5)

[-4; 5]

### Задача 2. (2 балла).

1. В стране Самолётии 20 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).

Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов  $A$  и  $B$ , соединённых авиарейсом, стоимость билета из города  $A$  в город  $B$  (также как и обратного) в тугриках равна наибольшему из авиарасстояний от  $A$  и  $B$  до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 тугрик; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 тугрика и так далее.

Вася много путешествовал по Самолётии (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов  $A$  и  $B$ , соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из  $A$  в  $B$ , либо из  $B$  в  $A$ , причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество тугриков он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 190

2. В стране Аэродромии 30 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).

Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов А и В, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города А в город В (также как и обратного) в фартингах равна наибольшему из авиарасстояний от А и В до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 фартинг; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 фартинга и так далее.

Коля много путешествовал по Аэродромии (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов А и В, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из А в В, либо из В в А, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество фартингов он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 435

3. В стране Авиании 40 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).

Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов А и В, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города А в город В (также как и обратного) в марках равна наибольшему из авиарасстояний от А и В до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 марку; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 марки и так далее.

Петя много путешествовал по Авиании (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов А и В, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из А в В, либо из В в А, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество марок он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 780.

### **Примеры записи ответов:**

45

### **Задача 3. (2 балла)**

1. На координатной плоскости проведены прямые вида  $y = ax + b$  где  $a$  и  $b$  — натуральные числа от 1 до 9. Среди всех точек пересечения этих прямых выберите точку с наибольшей суммой координат. Ответ запишите в виде  $(x; y)$ .

Ответ:  $(8; 73) \parallel (8, 73) \parallel 8; 73 \parallel 8, 73$

2. На координатной плоскости проведены прямые вида  $y = ax + b$  где  $a$  и  $b$  — натуральные числа от 1 до 8. Среди всех точек пересечения этих прямых выберите точку с наибольшей суммой координат. Ответ запишите в виде  $(x; y)$ .

Ответ:  $(7; 57) \parallel (7, 57) \parallel 7; 57 \parallel 7, 57$

3. На координатной плоскости проведены прямые вида  $y = ax + b$  где  $a$  и  $b$  — натуральные числа от 1 до 7. Среди всех точек пересечения этих прямых выберите точку с наибольшей суммой координат. Ответ запишите в виде  $(x; y)$ .

Ответ:  $(6; 43) \parallel (6, 43) \parallel 6; 43 \parallel 6, 43$

**Примеры записи ответов:**

$(-4; 5)$

**Задача 4. (3 балла).**

1. На доске были написаны числа от 1 до 8. За ход разрешается стереть любые два числа  $x$  и  $y$  и записать вместо них число  $2x + 2y$ . После нескольких ходов на доске осталось одно число. Какое самое большое число могло получиться?

Ответ: 2562

2. На доске были написаны числа от 1 до 7. За ход разрешается стереть любые два числа  $x$  и  $y$  и записать вместо них число  $2x + 2y$ . После нескольких ходов на доске осталось одно число. Какое самое большое число могло получиться?

Ответ: 1090

3. На доске были написаны числа от 1 до 6. За ход разрешается стереть любые два числа  $x$  и  $y$  и записать вместо них число  $3x + 3y$ . После нескольких ходов на доске осталось одно число. Какое самое большое число могло получиться?

Ответ: 3099

**Примеры записи ответов:**

45

**Задача 5. (3 балла)**

1. Дан правильный 10-угольник. Сколькими способами в нём можно провести 3 диагонали, так, чтобы каждые две из них пересекались (внутри 10-угольника)?

Ответ: 210

2. Дан правильный 9-угольник. Сколькими способами в нём можно провести 3 диагонали, так, чтобы каждые две из них пересекались (внутри 9-угольника)?

Ответ: 84

3. Дан правильный 11-угольник. Сколькими способами в нём можно провести 3 диагонали, так, чтобы каждые две из них пересекались (внутри 11-угольника)?

Ответ: 462

**Примеры записи ответов:**

45

**Задача 6 (3 балла).**

1. Известно, что натуральное число  $n$  делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные  $n$ , если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и  $n$ ) равно 15 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 144, 324 || 144; 324 || 324; 144 || 324, 144

2. Известно, что натуральное число  $n$  делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные  $n$ , если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и  $n$ ) равно 21 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 576, 2916 || 576; 2916 || 2916, 576 || 2916; 576

3. Известно, что натуральное число  $n$  делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные  $n$ , если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и  $n$ ) равно 22 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 3072

**Примеры записи ответов:**

45

45; 456

**Задача 7 (3 балла).**

1. При каких натуральных  $x$  и  $y$  значение выражения  $4x + \frac{169}{x} + 9y + \frac{625}{y}$  наименьшее?  
В ответе укажите  $x$  и  $y$  в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 7, 8 || 7; 8 || (7, 8) || (7; 8)

2. При каких натуральных  $x$  и  $y$  значение выражения  $4x + \frac{289}{x} + 16y + \frac{529}{y}$  наименьшее?  
В ответе укажите  $x$  и  $y$  в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 9, 6 || 9; 6 || (9, 6) || (9; 6)

3. При каких натуральных  $x$  и  $y$  значение выражения  $25x + \frac{484}{x} + 4y + \frac{225}{y}$  наименьшее?  
В ответе укажите  $x$  и  $y$  в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 4, 8 || 4; 8 || (4, 8) || (4; 8)

**Примеры записи ответов:**

(1; 2)

1; 2

**Задача 4 (4 балла).**

1. Известно, что квадратное уравнение  $Ax^2 + Bx + V = 0$ , где  $A$ ,  $B$  и  $V$  — какие-то цифры, имеет корень  $-3/2$ . На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число  $ABV$  (то есть число, состоящее из цифр  $A$ ,  $B$  и  $V$  в таком порядке)?

Ответ: 23

2. Известно, что квадратное уравнение  $Ax^2 + Bx + V = 0$ , где  $A$ ,  $B$  и  $V$  — какие-то цифры, имеет корень  $-3$ . На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число  $ABV$  (то есть число, состоящее из цифр  $A$ ,  $B$  и  $V$  в таком порядке)?

Ответ: 13

3. Известно, что квадратное уравнение  $Ax^2 + Bx + V = 0$ , где  $A$ ,  $B$  и  $V$  — какие-то цифры, имеет корень  $-7$ . На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число  $ABV$  (то есть число, состоящее из цифр  $A$ ,  $B$  и  $V$  в таком порядке)?

Ответ: 17

**Примеры записи ответов:**

45

**Задача 9 (4 балла).**

1.  $ABCD$  — равнобедренная трапеция,  $AB = CD = 49$ ,  $BC = 84$ ,  $AD = 140$ .  $BCDE$  также равнобедренная трапеция. Найдите  $AE$ . (Точки  $A$  и  $E$  не совпадают)  
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 136.

2.  $ABCD$  — равнобедренная трапеция,  $AB = CD = 121$ ,  $BC = 176$ ,  $AD = 220$ .  $BCDE$  также равнобедренная трапеция. Найдите  $AE$ . (Точки  $A$  и  $E$  не совпадают)  
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 84.

3.  $ABCD$  — равнобедренная трапеция,  $AB = CD = 25$ ,  $BC = 40$ ,  $AD = 60$ .  $BCDE$  также равнобедренная трапеция. Найдите  $AE$ . (Точки  $A$  и  $E$  не совпадают)  
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 44.

**Примеры записи ответов:**

45

45; 56

**Задача 10 (4 балла).**

1. Из точки  $A$  проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки  $A$  до точки касания равно 13, а расстояние между точками касания равно 24. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки  $A$  до точки на окружности.

Ответ: 65

2. Из точки  $A$  проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки  $A$  до точки касания равно 10, а расстояние между точками касания равно 12. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки  $A$  до точки на окружности.

Ответ: 20

3. Из точки  $A$  проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки  $A$  до точки касания равно 10, а расстояние между точками касания равно 16. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки  $A$  до точки на окружности.

Ответ: 30

**Примеры записи ответов:**

45