II отборочный тур.
11 класс.

Задача 1. (2 балла)

1. $P(x)$ — многочлен третьей степени, все четыре коэффициента которого натуральные простые числа. Оказалось, что все четыре коэффициента многочлена $P(x) - P'(x)$ также натуральные простые числа. Какое наименьшее значение может принимать коэффициет при x^2 в многочлене $P(x)$?

Ответ: 11

2. $P(x)$ — многочлен третьей степени, все четыре коэффициента которого натуральные простые числа. Оказалось, что все четыре коэффициента многочлена $P(x) + 2P'(x)$ также натуральные простые числа. Какое наименьшее значение может принимать коэффициет при x^2 в многочлене $P(x)$?

Ответ: 5

3. $P(x)$ — многочлен третьей степени, все четыре коэффициента которого натуральные простые числа. Оказалось, что все четыре коэффициента многочлена $P(x) - 2P'(x)$ также натуральные простые числа. Какое наименьшее значение может принимать коэффициет при x^2 в многочлене $P(x)$?

Ответ: 17

Задача 2. (2 балла)

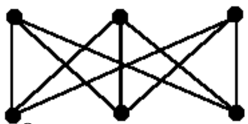
1. Сколько существует способов раскрасить вершины куба в 4 цвета так, чтобы любые две соседние вершины имели различные цвета, и вершины, имеющие общую соседнюю, также имели бы различные цвета?

Ответ: 24

2. Сколько существует способов раскрасить вершины треугольной призмы в 3 цвета так, чтобы любые две вершины, имеющие общую соседнюю, имели бы различные цвета?

Ответ: 6

3. Сколько существует способов раскрасить 6 отмеченных точек на рисунке в три цвета так, чтобы любые две точки, имеющие общую соседнюю, имели бы различные цвета? (Соседними называются точки, соединённые отрезками).



Ответ: 36

Задача 3. (2 балла)

1. Найдите все целые числа, входящие в область определения функции $\arcsin \ln \dfrac{|x|+3}{2} + \ln \sin x$. Ответы перечислите в порядке возрастания через точку с запятой.

Примеры записи ответа:

1

0;1

Ответ: 1; 2 || 1, 2 || 2; 1 || 2, 1

2. Найдите все целые числа, входящие в область определения функции $\arccos \ln \dfrac{|x|+2}{2} + \ln \cos x$. Ответы перечислите в порядке возрастания через точку с запятой.

Примеры записи ответа:

1

0;1

Ответ: -1; 0; 1 || -1, 0, 1 || 1; 0; -1 || 1, 0, -1

3. Найдите все целые числа, входящие в область определения функции $\arcsin \ln \dfrac{|x|+2}{2} + \log_{\cos x} 2$. Ответы перечислите в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответа:

1

0;1

Ответ: -1; 1|| -1, 1 || 1; -1 || 1, -1

Задача 4. (3 балла)

1. Для функции f и всех неотрицательных x и y выполняется равенство $f(\sqrt{x}) + f(\sqrt{y}) = f(\sqrt{x+y})$. Также известно, что $f(10) = 4$. Найдите $f(15)$.

Ответ: 9

2. Для функции f и всех неотрицательных x и y выполняется равенство $f(\sqrt[3]{x}) + f(\sqrt[3]{y}) = f(\sqrt[3]{x+y})$. Также известно, что $f(6) = 8$. Найдите $f(9)$.

Ответ: 27

3. Для функции f и всех неотрицательных x и y выполняется равенство $f(\sqrt[4]{x}) + f(\sqrt[4]{y}) = f(\sqrt[4]{x+y})$. Также известно, что $f(2) = 4$. Найдите $f(3)$.

Ответ: 81/4 || 20,25 || 20.25

Задача 5. (3 балла)

1. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ и $a_{n+1} = 4a_n^3 - 3a_n$. Найдите $a_1 a_{2018}$.

Ответ: -1/4 || -0.25 || -0,25

2. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$ и $a_{n+1} = 3a_n - 4a_n^3$. Найдите $(a_1 a_{2018})^2$.

Ответ: 5/16 || 0.3125 || 0,3125

3. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ и $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$. Найдите $a_1 a_{2018}$.

Ответ: 1/4 || 0.25 || 0,25

Задача 6. (3 балла)

1. Найдите суммарную длину промежутков, являющихся решением неравенства $x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)\ldots(x^2-99)(x-10) < 0$.

Ответ: 10

2. Найдите суммарную длину промежутков, являющихся решением неравенства $x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)\ldots(x^2-120)(x-11) < 0$.

Ответ: 11

3. Найдите суммарную длину промежутков, являющихся решением неравенства $x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)\ldots(x^2-80)(x-9) < 0$.

Ответ: 9

Задача 7. (3 балла)

1. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, как на диаметрах, построены две окружности, пересекающиеся в точках K и L. Прямая KL пересекает основание BC в точке X. Прямая BC вторично пересекает окружность, построенную на AB, как на диаметре, в точке Y. $AB = \sqrt{185}$, $BC = 3$, $CD = 4\sqrt{5}$, $AD = 18$.

Найдите XY.

Ответ: 12

2. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, как на диаметрах, построены две окружности, пересекающиеся в точках K и L. Прямая KL пересекает основание BC в точке X. Прямая BC вторично пересекает окружность, построенную на AB, как на диаметре, в точке Y. $AB = 13$, $BC = 3$, $CD = \sqrt{145}$, $AD = 9$.

Найдите XY.

Ответ: 6

3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, как на диаметрах, построены две окружности, пересекающиеся в точках K и L. Прямая KL пересекает основание BC в точке X. Прямая BC вторично пересекает окружность, построенную на AB, как на диаметре, в точке Y. $AB = \sqrt{181}$, $BC = 3$, $CD = \sqrt{109}$, $AD = 15$.

Найдите XY.

Ответ: 10

Задача 8. (3 балла)

1. Сколько натуральных членов содержит разложение бинома $(8^{\frac{1}{7}} + 18^{\frac{1}{3}})^{220}$?

Ответ: 11

2. Сколько натуральных членов содержит разложение бинома $(8^{\frac{1}{7}} + 18^{\frac{1}{3}})^{150}$?

Ответ: 8

3. Сколько натуральных членов содержит разложение бинома $(8^{\frac{1}{7}} + 18^{\frac{1}{3}})^{250}$?

Ответ: 12

Задача 9. (4 балла)

1. Вершины одной из граней куба со стороной 6 лежат на сторонах треугольника ABC. Точка D лежит на противоположной грани этого куба. какое наименьшее значение может принимать объём тетраэдра $ABCD$?

Ответ: 144

2. Вершины одной из граней куба со стороной 9 лежат на сторонах треугольника ABC. Точка D лежит на противоположной грани этого куба. какое наименьшее значение может принимать объём тетраэдра $ABCD$?

Ответ: 486

3. Вершины одной из граней куба со стороной 30 лежат на сторонах треугольника ABC. Точка D лежит на противоположной грани этого куба. какое наименьшее значение может принимать объём тетраэдра $ABCD$?

Ответ: 18000

Задача 10. (4 балла)

1. Сколько различных векторов можно получить, складывая векторы в пространстве с целочисленными координатами и длиной $\sqrt{3}$, если каждый из 8 таких векторов в одной сумме может использоваться не более одного раза?

Ответ: 65

2. Сколько различных векторов можно получить, складывая векторы в пространстве с целочисленными координатами и длиной $\sqrt{2}$, если каждый из 12 таких векторов в одной сумме может использоваться не более одного раза?

Ответ: 201

3. Сколько различных векторов можно получить, складывая векторы на плоскости с целочисленными координатами и длиной не более $\sqrt{2}$, если каждый из 9 таких векторов в одной сумме может использоваться не более одного раза?

Ответ: 37