Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

10 класс

1 вариант

Решения

1. (2 балла) Числовая последовательность задана условием $x_{n+1} = 3x_n + 4x_{n-1}$. Может ли она быть периодической, но не постоянной?

Ответ: Да, может.

Решение: Например, последовательность $(-1)^n$.

2. (2 балла) Точка M лежит на стороне правильного шестиугольника со стороной 10. Найдите сумму расстояний от точки M до прямых, содержащих остальные стороны шестиугольника.

Ответ: $30\sqrt{3}$.

Решение: Расстояние от точки на стороне до противоположной стороны равно расстоянию между этими сторонами и, следовательно, расстоянию между двума вершинами шестиугольника, расположенными через одну. Это расстояние, очевидно, равно $2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 10\sqrt{3}$.

Также, если из нашей точки опустить перпендикуляры на прямые, содержащие две противоположные стороны шестиугольника, они образуют один отрезок, и его длина также будет равна расстоянию между этими прямыми, то есть $10\sqrt{3}$. Таким образом, мы получаем ответ $30\sqrt{3}$.

3. (2 балла) Для любого ли квадратного трёхчлена $f(x)$ существуют различные числа a, b, c и d такие, что $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$ и $f(d) = a$?

Ответ: Нет, не для любого.

Решение: Контрпримером является, в частности, $y = x^2$.

Во-первых, ни одно из чисел a, b, c и d не может быть отрицательным, т.к. отрицательные числа не бывают значениями данного трёхчлена.

Во-вторых, числа 0 и 1 также не подходят, так как $f(x)$ не переводит ни одно их наших чисел в себя.

Допустим, $a > 1$. Тогда $b = a^2 > a > 1$, аналогично $a > b > c > d > a$. Получаем противоречие.

Если же $a < 1$, те же самые неравенства получаются в обратную сторону. Снова противоречие.

Таким образом, для данного трёхчлена не подходят никакие числа.

4. (3 балла) На доске было записано 15 различных нецелых чисел. Для каждого числа x из этих пятнадцати Вася выписал себе в тетрадку отдельно $[x]$ и $\dfrac{1}{\{x\}}$. Какое наименьшее количество различных чисел могло получиться у Васи?

$[x]$ и $\{x\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа x.

Ответ: 4.

Решение:

Пусть получилось всего не более, чем 3 числа. Тогда у исходных чисел могут быть максимум 3 различных целых и 3 различных дробных части, т.е. всего получается не более $3 \cdot 3 = 9$ вариантов исходных чисел.

Пример для 4 чисел строится как угодно: берём любые 4 натуральных числа, и для каждых a и b (включая одинаковые) строим число $a + \dfrac{1}{b}$. Получается 16 различных исходных чисел, любое из них можно выкинуть.

5. (3 балла) Пусть p, q и r — нечётные простые числа. Докажите, что $p^3+q^3+3pqr \neq r^3$.

Решение:

Пусть это $p^3+q^3+3pqr-r^3=0$. Разложим его на множители. Получится $(p+q-r)(p^2+q^2+r^2+pr+qr-pq) = (p+q-r)\cdot\frac{1}{2}\cdot((p-q)^2+(p+r)^2+(q+r)^2)$.

Вторая скобка всегда положительна, значит, первая равна 0, откуда $r=p+q$, что невозможно при нечётных числах p, q и r.

6. (4 балла) Даны три окружности радиусов 2, 3 и 5, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C внешним образом. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{9-\sqrt{21}}{2\sqrt{7}} = \dfrac{9\sqrt{7}-7\sqrt{3}}{14}$

Решение:

Введём следующие обозначения: у первой окружности: центр — точка O_1, радиус равен a; у второй окружности: центр — точка O_2, радиус равен b; у третьей окружности: центр — точка O_3, радиус равен c. Так как точки A, B, C являются точками касания двух окружностей из трех, то эти точки лежат на отрезках O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3. Не теряя общности, можно считать, что точка A лежит на отрезке O_2O_3, точка B — на O_1O_3, точка C — на O_1O_2. Тогда по теореме косинусов для треугольника $O_1O_2O_3$.

$$\cos(O_2O_1O_3) = \frac{(a+b)^2+(a+c)^2-(b+c)^2}{2(a+b)(a+c)} = 1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Аналогично, для двух других углов:

$$\cos(O_1O_2O_3) = 1-\frac{2ac}{(a+b)(b+c)};$$

$$\cos(O_2O_3O_1) = 1-\frac{2ab}{(a+c)(b+c)}.$$

Обозначим за d следующее выражение: $d = \dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}}$.

По теореме косинусов из треугольника O_1BC:

$$BC = \sqrt{2a^2-2a^2\left(1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}\right)} = \sqrt{\frac{4a^2bc}{(a+b)(a+c)}} = 2\sqrt{a}\sqrt{b+c}\cdot d.$$

Аналогично по теореме косинусов для треугольников O_2AC и O_3AB:
$AC = 2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\cdot d$ и $AB = 2\sqrt{c}\sqrt{a+b}\cdot d$.
Тогда по формуле Герона, где S — площадь треугольника ABC:

$$\begin{gathered}
S^2 = d^4(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot(-\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot \\
\cdot(\sqrt{a}\sqrt{b+c}-\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}-\sqrt{c}\sqrt{a+b}) = \\
= d^4(-a(b+c)+(\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})^2)(a(b+c)-(\sqrt{b}\sqrt{a+c}-\sqrt{c}\sqrt{a+b})^2) = \\
= d^4(2bc+2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\sqrt{c}\sqrt{a+b})(-2bc+2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\sqrt{c}\sqrt{a+b}) \\
= d^4(4bc(a+b)(a+c)-4b^2c^2) = d^4 4bc((a+b)(a+c)-bc) = d^4 4abc(a+b+c)
\end{gathered}$$

Тогда $S = 2d^2\sqrt{abc}\sqrt{a+b+c}$.

Значит, радиус вписанной окружности можно вычислить по следующей формуле, где r — радиус вписанной окружности ABC, p — полупериметр треугольника ABC:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2d^2\sqrt{abc}\sqrt{a+b+c}}{d(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})} =$$

$$= \frac{2abc\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})}.$$

Подставим значения радиусов окружностей из условия и получим, что радиус вписанной окружности треугольника ABC следующий:

$$r = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2+3+5}}{\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 8}(\sqrt{2}\sqrt{8} + \sqrt{3}\sqrt{7} + \sqrt{5}\sqrt{5})} = \frac{30}{\sqrt{7}(9+\sqrt{21})} = \frac{9-\sqrt{21}}{2\sqrt{7}} = \frac{9\sqrt{7}-7\sqrt{3}}{14}.$$

7. (4 балла) Найдите, чему может быть равно $x+y$, если известно, что $x^3 - 6x^2 + 15x = 12$ и $y^3 - 6y^2 + 15y = 16$.

Ответ: 4.

Решение:

Обозначим $u = x - 2$ и $v = y - 2$. Тогда исходные уравнения превратятся в $u^3 + 3u = -2$ и $v^3 + 3v = 2$. Сложив эти уравнения, получаем $(u+v)(u^2 - uv + v^2 + 3) = 0$. Вторая скобка всегда положительна, значит первая равна нулю, откуда $x + y = u + v + 4 = 4$..

8. (5 баллов) На клетчатой доске 9×9 расположены 324 фишки. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек.

Ответ: Не при любой.

Решение 1:

Пронумеруем строки и столбцы числами от 0 до 10. Номера строки и столбца, в которых стоит фишка, будем называть её координатами.

Заметим, что при данной операции не меняется остаток от деления суммы всех координат всех фишек на 11. Изначально этот остаток можно сделать любым, например, можно все фишки собрать в клетке $(0,0)$ а одну поставить в клетку с любыми нужными координатами. В требуемой же конечной этот остаток фиксирован. Значит, можно подобрать начальную ситуацию, где этот остаток другой, и её свести к требуемой не получится.

Решение 2:

Давайте заметим, что чётность количества фишек на главной диагонали не меняется: каждый раз либо с числом этих фишек ничего не происходит, либо оно увеличивается на 2, либо уменьшается на 4.

В то же время в начальной ситуации количество фишек на диагонали может быть любым, в том числе нечётным.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

10 класс

2 вариант

Решения

1. (2 балла) Числовая последовательность задана условием $x_{n+1} = 2x_n + 3x_{n-1}$. Может ли она быть периодической, но не постоянной?

Ответ: Да, может.

Решение: Например, последовательность $(-1)^n$.

2. (2 балла) Точка M лежит на стороне правильного шестиугольника со стороной 12. Найдите сумму расстояний от точки M до прямых, содержащих остальные стороны шестиугольника.

Ответ: $36\sqrt{3}$.

Решение: Расстояние от точки на стороне до противоположной стороны равно расстоянию между этими сторонами и, следовательно, расстоянию между двума вершинами шестиугольника, расположенными через одну. Это расстояние, очевидно, равно $2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 12\sqrt{3}$.

Также, если из нашей точки опустить перпендикуляры на прямые, содержащие две противоположные стороны шестиугольника, они образуют один отрезок, и его длина также будет равна расстоянию между этими прямыми, то есть $12\sqrt{3}$. Таким образом, мы получаем ответ $36\sqrt{3}$.

3. (2 балла) Для любого ли квадратного трёхчлена $f(x)$ существуют различные числа a, b и c, что $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$?

Ответ: Нет, не для любого.

Решение: Контрпримером является, в частности, $y = x^2$.

Во-первых, ни одно из чисел a, b, и c не может быть отрицательным, т.к. отрицательные числа не бывают значениями данного трёхчлена.

Во-вторых, числа 0 и 1 также не подходят, так как $f(x)$ не переводит ни одно их наших чисел в себя.

Допустим, $a > 1$. Тогда $b = a^2 > a > 1$, аналогично $a > b > c > a$. Получаем противоречие.

Если же $a < 1$, те же самые неравенства получаются в обратную сторону. Снова противоречие.

Таким образом, для данного трёхчлена не подходят никакие числа.

4. (3 балла) На доске было записано 20 различных нецелых чисел. Для каждого числа x из этих двадцати Вася выписал себе в тетрадку отдельно $[x]$ и $\dfrac{1}{\{x\}}$. Какое наименьшее количество различных чисел могло получиться у Васи?

$[x]$ и $\{x\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа x.

Ответ: 5.

Решение:

Пусть получилось всего не более, чем 4 числа. Тогда у исходных чисел могут быть максимум 4 различных целых и 4 различных дробных части, т.е. всего получается не более $4 \cdot 4 = 16$ вариантов исходных чисел.

Пример для 5 чисел строится как угодно: например, берём любые 5 натуральных чисел, и для каждых различных a и b строим число $a + \dfrac{1}{b}$.

5. (3 балла) Пусть p, q и r — различные простые числа и $p^3+q^3+3pqr=r^3$. Докажите, что наименьшее из этих трёх чисел равно 2.

Решение:

Разложим выражение $p^3+q^3+3pqr-r^3$ на множители. Получится $(p+q-r)(p^2+q^2+r^2+pr+qr-pq)=(p+q-r)\cdot\frac{1}{2}\cdot((p-q)^2+(p+r)^2+(q+r)^2)$.

Вторая скобка всегда положительна, значит, первая равна 0, откуда $r=p+q$. Следовательно, p или q это 2.

6. (4 балла) Даны три окружности радиусов 1, 2 и 3, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C внешним образом. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{(-30+15\sqrt{2}+6\sqrt{5}+3\sqrt{10}))}{30}$.

Решение:

Введём следующие обозначения: у первой окружности: центр — точка O_1, радиус равен a; у второй окружности: центр — точка O_2, радиус равен b; у третьей окружности: центр — точка O_3, радиус равен c. Так как точки A, B, C являются точками касания двух окружностей из трех, то эти точки лежат на отрезках O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3. Не теряя общности, можно считать, что точка A лежит на отрезке O_2O_3, точка B — на O_1O_3, точка C — на O_1O_2. Тогда по теореме косинусов для треугольника $O_1O_2O_3$.

$$\cos(O_2O_1O_3)=\frac{(a+b)^2+(a+c)^2-(b+c)^2}{2(a+b)(a+c)}=1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Аналогично, для двух других углов:

$$\cos(O_1O_2O_3)=1-\frac{2ac}{(a+b)(b+c)};$$

$$\cos(O_2O_3O_1)=1-\frac{2ab}{(a+c)(b+c)}.$$

Обозначим за d следующее выражение: $d=\dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}}$.

По теореме косинусов из треугольника O_1BC:

$$BC=\sqrt{2a^2-2a^2\left(1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}\right)}=\sqrt{\frac{4a^2bc}{(a+b)(a+c)}}=2\sqrt{a}\sqrt{b+c}\cdot d.$$

Аналогично по теореме косинусов для треугольников O_2AC и O_3AB:
$AC=2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\cdot d$ и $AB=2\sqrt{c}\sqrt{a+b}\cdot d$.
Тогда по формуле Герона, где S — площадь треугольника ABC:

$$\begin{gathered}S^2=d^4(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot(-\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot\\ \cdot(\sqrt{a}\sqrt{b+c}-\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})\cdot(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}-\sqrt{c}\sqrt{a+b})=\\ =d^4(-a(b+c)+(\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})^2)(a(b+c)-(\sqrt{b}\sqrt{a+c}-\sqrt{c}\sqrt{a+b})^2)=\\ =d^4(2bc+2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\sqrt{c}\sqrt{a+b})(-2bc+2\sqrt{b}\sqrt{a+c}\sqrt{c}\sqrt{a+b})\\ =d^4(4bc(a+b)(a+c)-4b^2c^2)=d^44bc((a+b)(a+c)-bc)=d^44abc(a+b+c)\end{gathered}$$

Тогда $S=2d^2\sqrt{abc}\sqrt{a+b+c}$.

Значит, радиус вписанной окружности можно вычислить по следующей формуле, где r — радиус вписанной окружности ABC, p — полупериметр треугольника ABC:

$$r=\frac{S}{p}=\frac{2d^2\sqrt{abc}\sqrt{a+b+c}}{d(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})}=$$

$$=\frac{2abc\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}(\sqrt{a}\sqrt{b+c}+\sqrt{b}\sqrt{a+c}+\sqrt{c}\sqrt{a+b})}.$$

Подставим значения радиусов окружностей из условия и получим, что радиус вписанной окружности треугольника ABC следующий:

$$r = \frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \sqrt{1+2+3}}{\sqrt{3\cdot 4\cdot 5}(\sqrt{1}\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{4}+\sqrt{3}\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2\sqrt{2}+3)} = \frac{(-30+15\sqrt{2}+6\sqrt{5}+3\sqrt{10}))}{30}.$$

7. (4 балла) Найдите, чему может быть равно $x+y$, если известно, что $x^3+6x^2+16x=-15$ и $y^3+6y^2+16y=-17$.

Ответ: -4

Решение: Обозначим $u=x+2$ и $v=y+2$. Тогда исходные уравнения превратятся в $u^3+4u=1$ и $v^3+4v=-1$. Сложив эти уравнения, получаем $(u+v)(u^2-uv+v^2+4)=0$. Вторая скобка всегда положительна, значит первая равна нулю, откуда $x+y=u+v-4=-4$.

8. (5 баллов) На клетчатой доске 11×11 расположены 484 фишки. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек.

Ответ: Не при любой.

Решение 1:

Пронумеруем строки и столбцы числами от 0 до 10. Номера строки и столбца, в которых стоит фишка, будем называть её координатами.

Заметим, что при данной операции не меняется остаток от деления суммы всех координат всех фишек на 11. Изначально этот остаток можно сделать любым, например, можно все фишки собрать в клетке $(0,0)$ а одну поставить в клетку с любыми нужными координатами. В требуемой же конечной этот остаток фиксирован. Значит, можно подобрать начальную ситуацию, где этот остаток другой, и её свести к требуемой не получится.

Решение 2:

Давайте заметим, что чётность количества фишек на главной диагонали не меняется: каждый раз либо с числом этих фишек ничего не происходит, либо оно увеличивается на 2, либо уменьшается на 4.

В то же время в начальной ситуации количество фишек на диагонали может быть любым, в том числе нечётным.