10 класс. I отборочный тур.

Задача 1 (2 балла).

1. На листке бумаги нарисовали квадрат со стороной 1, рядом с ним нарисовали квадрат со стороной 2, рядом с ними нарисовали квадрат со стороной 3 и т.д. Оказалось, что площадь всей получившейся фигуры равна 338350. Какое количество квадратов было нарисовано?

Ответ: 100

2. На листке бумаги нарисовали квадрат со стороной 1, рядом с ним нарисовали квадрат со стороной 2, рядом с ними нарисовали квадрат со стороной 3 и т.д. Оказалось, что площадь всей получившейся фигуры равна 1136275. Какое количество квадратов было нарисовано?

Ответ: 150

3. На листке бумаги нарисовали квадрат со стороной 1, рядом с ним нарисовали квадрат со стороной 2, рядом с ними нарисовали квадрат со стороной 3 и т.д. Оказалось, что площадь всей получившейся фигуры равна 42925. Какое количество квадратов было нарисовано?

Ответ: 50

Примеры записи ответов:
45

Задача 2. (2 балла).

1. В стране Самолётии 20 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).
Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов A и B, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города A в город B (также как и обратного) в тугриках равна наибольшему из авиарасстояний от A и B до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 тугрик; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 тугрика и так далее.
Вася много путешествовал по Самолётии (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов A и B, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из A в B, либо из B в A, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество тугриков он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 190

2. В стране Аэродромии 30 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).

Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов А и В, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города А в город В (также как и обратного) в фартингах равна наибольшему из авиарасстояний от А и В до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 фартинг; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 фартинга и так далее.
Коля много путешествовал по Аэродромии (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов А и В, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из А в В, либо из В в А, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество фартингов он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 435

3. В стране Авиании 40 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).
Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов А и В, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города А в город В (также как и обратного) в марках равна наибольшему из авиарасстояний от А и В до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 марку; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 марки и так далее.
Петя много путешествовал по Авиании (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов А и В, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из А в В, либо из В в А, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество марок он мог потратить на авиаперелёты?

Ответ: 780.

<u>Примеры записи ответов:</u>
45

Задача 3 (3 балла).

1. При каких натуральных x и y значение выражения $4x+\frac{169}{x}+9y+\frac{625}{y}$ наименьшее? В ответе укажите x и y в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 7, 8 || 7; 8 || (7, 8) || (7; 8)

2. При каких натуральных x и y значение выражения $4x+\frac{289}{x}+16y+\frac{529}{y}$ наименьшее? В ответе укажите x и y в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 9, 6 || 9; 6 || (9, 6) || (9; 6)

3. При каких натуральных x и y значение выражения $25x + \frac{484}{x} + 4y + \frac{225}{y}$ наименьшее? В ответе укажите x и y в правильном порядке через точку с запятой.

Ответ: 4, 8 || 4; 8 || (4, 8) || (4; 8)

Примеры записи ответов:
(1; 2)
1; 2

Задача 4 (3 балла).

1. Известно, что квадратное уравнение Аx^2 + Бx + В = 0, где А, Б и В — какие-то цифры, имеет корень -3/2. На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр А, Б и В в таком порядке)?

Ответ: 23

2. Известно, что квадратное уравнение Аx^2 + Бx + В = 0, где А, Б и В — какие-то цифры, имеет корень -3. На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр А, Б и В в таком порядке)?

Ответ: 13

3. Известно, что квадратное уравнение Аx^2 + Бx + В = 0, где А, Б и В — какие-то цифры, имеет корень -7. На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр А, Б и В в таком порядке)?

Ответ: 17

Примеры записи ответов:
45

Задача 5 (3 балла).

1. Известно, что натуральное число n делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные n, если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и n) равно 15 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 144, 324 || 144; 324 || 324; 144 || 324, 144

2. Известно, что натуральное число n делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные n, если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и n) равно 21 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 576, 2916 || 576; 2916 || 2916, 576 || 2916; 576

3. Известно, что натуральное число n делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные n, если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и n) равно 22 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 3072

Примеры записи ответов:
45
45; 456

Задача 6 (3 балла).

1. ABCD — равнобедренная трапеция, AB = CD = 49, BC = 84, AD = 140. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 136.

2. ABCD — равнобедренная трапеция, AB = CD = 121, BC = 176, AD = 220. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 84.

3. ABCD — равнобедренная трапеция, AB = CD = 25, BC = 40, AD = 60. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)
Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 44.

Примеры записи ответов:
45
45; 56

Задача 7 (3 балла).

1. Дана арифметическая прогрессия a_n с разностью 2 и первым членом $a_1 = 9$. При каком n выполнено следующее равенство: $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=21$?

Ответ: 1009.

2. Дана арифметическая прогрессия a_n с разностью 2 и первым членом $a_1 = 4$. При каком n выполнено следующее равенство: $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=22$?

Ответ: 1057.

3. Дана арифметическая прогрессия a_n с разностью 2 и первым членом $a_1 = 1$. При каком n выполнено следующее равенство: $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=23$?

Ответ: 1105

Примеры записи ответов:
45

Задача 8 (3 балла).

1. Пусть $f(x)=\dfrac{2\cdot 9^x}{9^x+3}$. Найдите сумму $f(0)+f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)+f(1)$.

Ответ: 2018

2. Пусть $f(x)=\dfrac{16^x}{16^x+4}$. Найдите сумму $f(0)+f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)+f(1)$.

Ответ: 1009

3. Пусть $f(x)=\dfrac{3\cdot 4^x}{4^x+2}$. Найдите сумму $f(0)+f\left(\dfrac{1}{2017}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)+f(1)$.

Ответ: 3027

Примеры записи ответов:
45

Задача 9 (4 балла).

1. Из точки A проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки A до точки касания равно 13, а расстояние между точками касания равно 24. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки A до точки на окружности.

Ответ: 65

2. Из точки A проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки A до точки касания равно 10, а расстояние между точками касания равно 12. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки A до точки на окружности.

Ответ: 20

3. Из точки A проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки A до точки касания равно 10, а расстояние между точками касания равно 16. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки A до точки на окружности.

Ответ: 30

Примеры записи ответов:

45

Задача 10 (5 баллов).

1. График дробно-линейной функции $\frac{3x-3}{x-2}$ повернули вокруг некоторой точки на какой-то угол, в результате чего получился график дробно-линейной функции $\frac{-x+a}{2x-4}$. Чему может быть равно a? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -4, 8 || -4; 8 || 8; -4 || 8, -4

2. График дробно-линейной функции $\frac{5x-7}{x-2}$ повернули вокруг некоторой точки на какой-то угол, в результате чего получился график дробно-линейной функции $\frac{-12x+a}{3x+1}$. Чему может быть равно a? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5, -13 || 5; -13 || -13; 5 || -13, 5

3. График дробно-линейной функции $\frac{3x-11}{x-3}$ повернули вокруг некоторой точки на какой-то угол, в результате чего получился график дробно-линейной функции $\frac{12x-a}{4x-1}$. Чему может быть равно a? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -5; 11 || -5, 11 || 11; -5 || 11, -5

Примеры записи ответов:
-1
-1; 2