Задания первого отборочного этапа

11 класс

Задача 1. (2 балла)

1. Три высоты тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы в три, четыре и шесть раз соответственно. Во сколько раз четвёртая высота больше радиуса вписанной сферы?

2. Три высоты тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы в три, три и шесть раз соответственно. Во сколько раз четвёртая высота больше радиуса вписанной сферы?

3. Три высоты тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы в три, четыре и четыре раза соответственно. Во сколько раз четвёртая высота больше радиуса вписанной сферы?

<u>Примеры записи ответов:</u>
14
1/4

Задача 2. (2 балла)

1. Калькулятор АЧ-2016 может выполнять две операции: извлечение квадратного корня и взятие тангенса. Изначально в калькулятор было введено число 3^{-1024}. За какое наименьшее число операций из него можно получить число, большее 1?

2. Калькулятор АЧ-2016 может выполнять две операции: извлечение квадратного корня и взятие арксинуса. Изначально в калькулятор было введено число 2^{-512}. За какое наименьшее число операций из него можно получить число, большее 1?

3. Калькулятор АЧ-2016 может выполнять две операции: извлечение кубического корня и взятие тангенса. Изначально в калькулятор было введено число 2^{-243}. За какое наименьшее число операций из него можно получить число, большее 1?

<u>Примеры записи ответов:</u>
10

Задача 3. (2 балла)

1. При каком наибольшем *a* множество значений функции $\sqrt{a(\sqrt{3}\sin\pi x+\cos\pi x)}$ целиком

содержится в области её определения?

2. При каком наибольшем a множество значений функции $\sqrt{a(\sin \pi x + \sqrt{3} \cos \pi x)}$ целиком содержится в области её определения?

3. При каком наибольшем a множество значений функции $\sqrt{\sqrt{2}\, a(\sin \pi x + \cos \pi x)}$ целиком содержится в области её определения?

Задача 4. (3 балла)

1. Кубический многочлен p(x) со старшим коэффициентом 1 таков, что p'(0) = p(-1), p'(1) = p(0), p'(2) = p(1). Найдите свободный член в многочлене p(x).

2. Кубический многочлен p(x) со старшим коэффициентом 1 таков, что p'(-2) = p(-1), p'(-1) = p(0), p'(0) = p(1). Найдите свободный член в многочлене p(x).

3. Кубический многочлен p(x) со старшим коэффициентом 1 таков, что p'(1) = p(0), p'(2) = p(1), p'(3) = p(2),. Найдите коэффициент при x в многочлене p(x).

Задача 5. (3 балла)

1. В стране есть 11 городов, некоторые из которых соединены почтовыми рейсами. Чтобы письмо дошло из одного города в другой, на него нужно наклеить столько марок, сколько рейсов для это требуется (используется маршрут, требующий наименьшего количества рейсов). Известно, что даже если два города не соединены рейсом, послать письмо из одного в другой всегда возможно.
Под Новый Год мэры всех городов послали друг другу поздравительные письма. Какое наибольшее количество марок могло им всем потребоваться?

2. В стране есть 10 городов, некоторые из которых соединены почтовыми рейсами. Чтобы письмо дошло из одного города в другой, на него нужно наклеить столько марок, сколько рейсов для это требуется (используется маршрут, требующий наименьшего количества рейсов). Известно, что даже если два города не соединены рейсом, послать письмо из одного в другой всегда возможно.
Под Новый Год мэры всех городов послали друг другу поздравительные письма. Какое наибольшее количество марок могло им всем потребоваться?

3. В стране есть 9 городов, некоторые из которых соединены почтовыми рейсами. Чтобы письмо дошло из одного города в другой, на него нужно наклеить столько марок, сколько рейсов для это требуется (используется маршрут, требующий наименьшего количества рейсов). Известно, что даже если два города не соединены рейсом, послать письмо из одного в другой всегда возможно.
Под Новый Год мэры всех городов послали друг другу поздравительные письма. Какое наибольшее количество марок могло им всем потребоваться?

Примеры записи ответов:
1000

Задача 6. (3 балла)

1. Коля взял дробно-линейную функцию $\frac{ax+b}{cx+d}$, где *a*, *b*, *c*, *d* — различные по абсолютной величине числа, и сложил её со всеми оставшимися 23 функциями, которые получаются из неё перестановкой чисел *a*, *b*, *c*, *d*. Найдите корень суммы всех этих функций, не зависящий от чисел *a*, *b*, *c*, *d*.

2. Аня взяла дробно-линейную функцию $\frac{ax-b}{cx-d}$, где *a*, *b*, *c*, *d* — различные по абсолютной величине числа, и сложила её со всеми оставшимися 23 функциями, которые получаются из неё перестановкой чисел *a*, *b*, *c*, *d*. Найдите корень суммы всех этих функций, не зависящий от чисел *a*, *b*, *c*, *d*.

3. Дима взял дробно-линейную функцию $\frac{ax+2b}{cx+2d}$, где *a*, *b*, *c*, *d* — положительные числа, и сложил её со всеми оставшимися 23 функциями, которые получаются из неё перестановкой чисел *a*, *b*, *c*, *d*. Найдите корень суммы всех этих функций, не зависящий от чисел *a*, *b*, *c*, *d*.

Примеры записи ответов:
14
1/4
-1,4

Задача 7. (3 балла)

1. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами 15 и 12 соответственно пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на луче AB и такова, что $O_1X = 41$, $AX = 52$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

2. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами 10 и 6 соответственно пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на луче BA и такова, что $O_1X = 17$, $AX = 9$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

3. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами 5 и 13 соответственно пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на луче AB и такова, что $O_2X = 37$, $XB = 30$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Задача 8. (3 балла)

1. Функия f(x) такова, что f(2x)=6 — f(x)/2. Найдите площадь подграфика функции f(1 — x + 2|x|) на участке от -1 до 3.

2. Функия f(x) такова, что f(3x)=8 — f(x)/3. Найдите площадь подграфика функции f(1 — 3,5x + 4,5|x|) на участке от -1 до 8.

3. Функия f(x) такова, что f(4x)=7,5 — f(x)/4. Найдите площадь подграфика функции f(1 — 7x + 8|x|) на участке от -1 до 15.

Задача 9. (4 балла)

1. Найдите последнюю цифру целой части числа $\left(\sqrt{15}+\sqrt{13}\right)^{2012}$.

2. Найдите последнюю цифру целой части числа $\left(\sqrt{22}+\sqrt{20}\right)^{2002}$.

3. Найдите последнюю цифру целой части числа $\left(\sqrt{37}+\sqrt{35}\right)^{2016}$.

Примеры записи ответов:
0

Задача 10. (4 балла)

1. Правильный додекаэдр (12-гранник с 20 вершинами) вписан в сферу радиуса 1. Из одной из вершин додекаэдра провели векторы ко всем остальным и посчитали скалярные произведения для каждой пары различных векторов, всего 171 штука. Чему равна сумма этих скалярных произведений?

2. Правильный икосаэдр (20-гранник с 12 вершинами) вписан в сферу радиуса 1. Из одной из вершин икосаэдра провели векторы ко всем остальным и посчитали скалярные произведения для каждой пары различных векторов, всего 55 штук. Чему равна сумма этих скалярных произведений?

3. Куб описан вокруг сферы радиуса 1. Из одного из центров граней куба проведены векторы ко всем остальным центрам граней и вершинам. У получившихся векторов посчитали скалярные произведения для каждой пары различных векторов, всего 78 штук.
Чему равна сумма этих скалярных произведений?