10 класс

Задача 1. (1 балл)

1. Какое наибольшее значение может принимать сумма
$\sin^2 a + \sin^2(a + 45^o) + \sin^2(a + 90^o) + \ldots + \sin^2(a + 315^o)$?

2. Какое наибольшее значение может принимать сумма
$\sin^2 a + \sin^2(a + 30^o) + \sin^2(a + 60^o) + \ldots + \sin^2(a + 330^o)$?

3. Какое наибольшее значение может принимать сумма
$\sin^2 a + \sin^2(a + 60^o) + \sin^2(a + 120^o) + \ldots + \sin^2(a + 300^o)$?

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

Задача 2. (3 балла)

1. Все семизначные числа, состоящие из различных цифр от 1 до 7, выписали в порядке возрастания. Каким по счёту идёт число 5143276?

2. Все семизначные числа, состоящие из различных цифр от 1 до 7, выписали в порядке возрастания. Каким по счёту идёт число 2376154?

3. Все семизначные числа, состоящие из различных цифр от 1 до 7, выписали в порядке возрастания. Каким по счёту идёт число 3241765?

Примеры записи ответа:
1,7

Задача 3. (3 балла)

1. Какое целое число можно записать в виде $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\ldots}}}$ (количество корней бесконечно).

2. Какое целое число можно записать в виде $\sqrt{4+3\sqrt{4+3\sqrt{4+\ldots}}}$ (количество корней бесконечно).

3. Какое целое число можно записать в виде $\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12-\ldots}}}$ (количество корней бесконечно).

Примеры записи ответа:
1,7

Задача 4. (3 балла)

1. Функция $f(x)$ принимает каждое значение не более двух раз. Кроме того, для любого ненулевого x выполняется равенство $f(x)+f(1-x)+f(\frac{1}{x})=10$. Найдите такое x, не равное $\frac{4}{7}$, что $f(x)=f(\frac{4}{7})$. Если такого x не существует, напишите «нет».

2. Функция $f(x)$ принимает каждое значение не более двух раз. Кроме того, для любого ненулевого x выполняется равенство $f(x)+f(1-x)+f(\frac{1}{x})=5$. Найдите такое x, не равное $\frac{3}{8}$, что $f(x)=f(\frac{3}{8})$. Если такого x не существует, напишите «нет».

3. Функция $f(x)$ принимает каждое значение не более двух раз. Кроме того, для любого ненулевого x выполняется равенство $f(x)+f(1-x)+f(\frac{1}{x})=6$. Найдите такое x, не равное $\frac{5}{7}$, что $f(x)=f(\frac{5}{7})$. Если такого x не существует, напишите «нет».

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
-17

Задача 5. (3 балла)

1. На единичном кубе вдоль каждого ребра и каждой диагонали каждой грани провели вектор в одну из двух возможных сторон , всего 24 штуки. Какое наибольшее значение может принимать квадрат суммы этих векторов?

2. На единичном кубе вдоль каждого ребра и каждой из четырёх диагоналей куба провели вектор в одну из двух возможных сторон, всего 16 штук. Какое наибольшее значение может принимать квадрат суммы этих векторов?

3. На единичном кубе вдоль каждого ребра провели вектор в одну из двух возможных сторон. На каждой грани выбрали одну диагональ и вдоль неё также провели вектор в одну из двух возможных сторон, причём проведённые 6 диагоналей оказались не параллельны. Всего получилось 18 векторов. Какое наибольшее значение может принимать квадрат суммы этих векторов?

__**Примеры записи ответа:**__
1,7
1/7
17

Задача 6. (3 балла)

1. В клетчатой таблице 9x9 стоят числа таким образом, что в числа в каждой строчке и в каждом столбце образуют арифметическую прогрессию в том порядке, в котором они там написаны. Таблица раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На угловых белых клетках таблицы стоят числа 1, 3, 5 и 9. Найдите сумму чисел на чёрных клетках таблицы.

2. В клетчатой таблице 11x11 стоят числа таким образом, что в числа в каждой строчке и в каждом столбце образуют арифметическую прогрессию в том порядке, в котором они там написаны. Таблица раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На угловых белых клетках таблицы стоят числа 1, 2, 4 и 7. Найдите сумму чисел на чёрных клетках таблицы.

1. В клетчатой таблице 13x13 стоят числа таким образом, что в числа в каждой строчке и в каждом столбце образуют арифметическую прогрессию в том порядке, в котором они там написаны. Таблица раскрашена в два цвета в шахматном порядке. На угловых белых клетках таблицы стоят числа 1, 2, 3 и 6. Найдите сумму чисел на чёрных клетках таблицы.

__**Примеры записи ответа:**__
1,7

1/7
-17

Задача 7. (3 балла)

1. Окружность радиуса 60 касается трёх сторон четырёхугольника ABCD: стороны AB в точке A, стороны CD в точке D и стороны BC в точке X. Оказалось, что BX = 30, CX = 20. Найдите площадь четырёхугольника.

2. Окружность радиуса 60 касается трёх сторон четырёхугольника ABCD: стороны AB в точке A, стороны CD в точке D и стороны BC в точке X. Оказалось, что BX = 45, CX = 30. Найдите площадь четырёхугольника.

3. Окружность радиуса 60 касается трёх сторон четырёхугольника ABCD: стороны AB в точке A, стороны CD в точке D и стороны BC в точке X. Оказалось, что BX = 20, CX = 45. Найдите площадь четырёхугольника.

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

Задача 8. (3 балла)

1. В американской деревне жили бледнолицые, чернокожие и индейцы, всего 61 человек. На Хэллоуин каждый индеец подарил тыкву каждому чернокожему, каждый чернокожий подарил тыкву каждому бледнолицему, каждый бледнолицый подарил тыкву каждому индейцу. Какое наибольшее количество тыкв могло быть подарено?

2. В школе было три класса: математический, гуманитарный и общеобразовательный, всего 91 человек. На Новый Год каждый ученик математического класса послал открытку каждому ученику гуманитарного, каждый ученик гуманитарного класса послал открытку каждому ученику общеобразовательного, каждый ученик общеобразовательного класса послал открытку каждому ученику математического. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?

3. На рок-фестивале встретились вокалисты, гитаристы и ударники, всего 121 человек. Каждый вокалист дал подзатыльник каждому гитаристу, каждый гитарист — каждому ударнику, а каждый ударник — каждому вокалисту. Какое наибольше количество подзатыльников могло быть получено участниками фестиваля?

Примеры записи ответа:
17

Задача 9. (3 балла)

1. 239-угольник вписан в окружность с диаметром $XY = 2$ и имеет ось симметрии, перпендикулярную этому диаметру. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин 239-угольника до точки X.

2. 57-угольник вписан в окружность с диаметром $XY = 4$ и имеет ось симметрии, перпендикулярную этому диаметру. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин 57-угольника до точки X.

3. 101-угольник вписан в окружность с диаметром $XY = 6$ и имеет ось симметрии, перпендикулярную этому диаметру. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин 101-угольника до точки X.

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17

Задача 10. (5 баллов)

1. По кругу были написаны 200 (не обязательно целых) чисел от 10 до 10000 включительно. От каждого числа взяли логарифм по основанию следующего за ним по часовой стрелке, после чего все полученные логарифмы сложили. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих логарифмов?

2. По кругу были написаны 300 (не обязательно целых) чисел от 10 до 1000 включительно. От каждого числа взяли логарифм по основанию следующего за ним по часовой стрелке, после чего все полученные логарифмы сложили. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих логарифмов?

3. По кругу были написаны 300 (не обязательно целых) чисел от 20 до 400 включительно. От каждого числа взяли логарифм по основанию следующего за ним по часовой стрелке, после чего все полученные логарифмы сложили. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих логарифмов?

Примеры записи ответа:
1,7
1/7
17