7 класс

1 вариант

1. (2 балла) Подряд без пробелов выписали все натуральные числа в порядке возрастания: $1234567891011\ldots$. Какая цифра стоит на 2017 месте в получившемся длинном числе?

Ответ: 7.

Решение: Первые 9 цифр содержатся в однозначных числах, следующие 180 — в двузначых. $2017-180-9=1828$. Далее, $1828:3=609\frac{1}{3}$. Это значит, что 2017-ая цифра — это первая цифра в 610-ом трёхзначном числе, т.е. в числе 709. Таким образом, это цифра 7.

2. (2 балла) В классе собрались 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, всегда сообщающий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждого из них попросили назвать сначала число рыцарей в комнате, затем число лжецов. Оказалось, что каждое число от 0 до 9 названо ровно по два раза. Сколько могло быть в классе рыцарей? Найдите все возможные варианте и докажите, что других нет.

Ответ: от 0 до 2.

Решение: Так как рыцари на все вопросы дают одинаковые ответы, их не может быть больше, чем максимальное число одинаковых ответов, т.е. чем 2. Примеры всех вариантов легко построить. Если рыцарей двое, они отвечают правду, каждый из лжецов выбирает себе одно из чисел, кроме 2 и 8, и оба раза называет выбранное число. Если рыцарь один, восемь лжецов называют каждый своё число, кроме 1 и 9, а девятый лжец называет 9 и 1 в неправильном порядке. Если рыцарей нет, на вопрос о числе рыцарей все называют чётные числа, а на вопрос о числе лжецов — нечётные.

3. (3 балла) Петя и Вася играют в игру на изначально белом клетчатом поле 101×101. Первым ходит Петя и он своим первым ходом может закрасить чёрным цветом одну клетку. Каждым следующим ходом игрок может закрасить чёрным любой вертикальный или горизонтальный белый клетчатый прямоугольник $1\times n$ на этом поле, где n — натуральное число, при этом оно может либо совпадать с количеством клеток, только что закрашенных другим игроком, либо превосходить его на один. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

Ответ: Выигрывает первый игрок — Петя.

Решение: Выигрышная стратегия первого игрока такова: первым ходом он перекрашивает центральную клетку, а дальше ходит симметрично сопернику относительно центра поля. Таким образом, после каждого его хода позиция на поле симметрична относительно центра, а значит на любой ход соперника у него снова есть симметричный ответ. Следовательно, остаться без хода может только второй, значит, первый выигрывает.

4. (3 балла) Существует ли натуральное четырёхзначное натуральное число с суммой цифр 23, которое делится на 23?

Ответ: Да, например $7682=23\cdot 334$.

Решение: Вообще говоря, решение заключено в ответе, но давайте поясним как найти такое число. Сумма цифра произведения даёт такой же остаток при делении на 9, как и сумма исходных чисел. Представим 23 в виде разности числа, кратного 5 и числа, кратного девяти: $23=5\cdot 10-3\cdot 9$. Значит, нам нужно подобрать трёхзначный множитель с суммой цифр 10.

Вот все возможные варианты: 1679, 1886, 3749, 3956, 4577, 4784, 4991, 5198, 5819, 6647, 6854, 7268, 7475, 7682, 8096, 8717, 8924, 9338, 9545, 9752.

5. (3 балла) Точки B и D взяты по разные стороны от прямой AC. Отрезки BH и DF — перпендикуляры, опущенные на отрезок AC из точек B и D соответственно. Оказалось, что $AH=HF=FC$ и $DH=AB$. Докажите, что $BC=AD$.

Доказательство: В треугольнике ABF отрезок BH является медианой и высотой, следовательно, $AB=BF$. Аналогично в треугольнике CDH выполняется равенство $CD=DH$. Кроме того, $DH = AB$ и $AF = CH$, значит, эти треугольники равны по третьему признаку. Отсюда $\angle BAC = \angle ACD$. Таким образом, получается что треугольники ABC и CDA равны по первому признаку, откуда следует требуемое равенство.

6. (3 балла) Дан ребус: ЖАЛО + ЛОЖА = ОСЕНЬ. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите значение буквы А.

Ответ: 8

Решение: Ребус можно переписать как ОСЕНЬ $=($ ЖА + ЛО $) \cdot 101$. Во-первых, это значит, что последняя цифра ЖА + ЛО — это Ь. Во-вторых, если ЖА + ЛО < 100, результат будет четырёхзначным. Пусть ЖА + ЛО $= 1X$Ь, где X — какая-то цифра.

Тогда ОСЕНЬ $= 1X$Ь$00 + 1X$Ь. Если Ь < 9, то вторая и четвёртая цифры этого числа должны совпадать, но они не совпадают. Значит, Ь $= 9$. Следовательно, А + О $= 9$. Но О это 1, значит А это 8.

Примеров множество, например, 7861+6178=14039.

7. (4 балла) У Алисы и Боба есть три равных отрезка. Сначала Алиса ломает один из отрезков на две неравные части. Затем Боб ломает другой из исходных отрезков на две любые части. В результате получается пять отрезков, из которых десятью способами можно выбрать три отрезка. Алиса выигрывает, если хотя бы 4 из этих десяти способов дают тройки отрезков, образующие треугольник. В противном случае выигрывает Боб. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

Ответ: Выигрывает Боб.

Решение: Пусть исходные отрезки имеют длину 1, а Алиса сломала один из отрезков на части x и $1-x$, пусть также для определённости $x < 1-x$. Тогда Бобу надо сломать отрезок на части $1-y$ и y так чтобы y был очень маленьким, а именно, выполнялись неравенства $y < x$, , $y < (1-x) - x$ и $y < (1-y) - (1-x)$, то есть $2y < x$. Ясно, что он может выбрать такой y.

Воспользуемся неравенством треугольника: чтобы можно было составить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы большая сторона треугольника была меньше суммы двух оставшихся. При таком выборе y оно не больше разности между любыми двумя другими отрезками, а значит, не может образовать треугольник ни с какими из них. Троек, которые включают в себя отрезок y, ровно 6. Кроме того, оставшийся отрезок длины 1, и отрезки, которые получила Алиса также не образуют треугольник. Это седьмая тройка отрезков, не образующая треугольник. Таким образом, Алисе остаётся только 3 тройки, которые могут образовать треугольник, и она проигрывает.

8. (4 балла) Треугольник разбит на 1000 треугольников. В каком наибольшем количестве различных точек могут находиться вершины этих треугольников?

Ответ: 1002

Решение: Сумма углов треугольника 180°, тысячи треугольников — 180000°. Откуда взялись лишние 179820°? Каждая внутренняя вершина, в которой сходятся только углы треугольников, добавляет 360°. Каждая вершина на стороне исходного треугольника или на стороне одного из треугольников разбиения добавляет 180°. Для достижения максимума необходимо, чтобы были точки только второго типа и их было $179820 : 180 = 999$. Пример строится последовательным добавлением новых вершин на стороны уже имеющихся треугольников.

Добавляя три вершины исходного треугольника, получаем ответ 1002.

7 класс
2 вариант

1. (2 балла) Подряд без пробелов выписали все натуральные числа от 999 до 1 в порядке убывания: 999998 . . . 321. Какая цифра стоит на 2710 месте в получившемся длинном числе?

Ответ: 9.

Решение: Первые $3 \cdot 900 = 2700$ цифр содержатся в трёхзначных числах. Значит, нам нужно отсчитать ещё 10 цифр в двузначных числах. То есть, нам нужна первая цифра четвёртого по величине двузначного числа. Это число — это 96, значит, нам нужна цифра 9.

2. (2 балла) В классе собрались 12 человек, каждый из которых либо рыцарь, всегда сообщающий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждого из них попросили назвать сначала число рыцарей в комнате, затем число лжецов. Оказалось, что каждое число от 1 до 12 названо ровно по два раза. Сколько могло быть в классе рыцарей? Найдите все возможные варианте и докажите, что других нет.

Ответ: от 0 до 2.

Решение: Так как рыцари на все вопросы дают одинаковые ответы, их не может быть больше, чем максимальное число одинаковых ответов, т.е. чем 2. Примеры всех вариантов легко построить. Если рыцарей двое, они отвечают правду, каждый из лжецов выбирает себе одно из чисел, кроме 2 и 10, и оба раза называет выбранное число. Если рыцарь один, восемь лжецов называют каждый своё число, кроме 1 и 11, а девятый лжец называет 11 и 1 в неправильном порядке. Если рыцарей нет, на вопрос о числе рыцарей все называют чётные числа, а на вопрос о числе лжецов — нечётные.

3. (3 балла) Петя и Вася играют в игру на изначально белом клетчатом поле 100×100. Первым ходит Петя и он своим первым ходом может закрасить чёрным цветом одну клетку. Каждым следующим ходом игрок может закрасить чёрным любой вертикальный или горизонтальный белый клетчатый прямоугольник $1 \times n$ на этом поле, где n — натуральное число, при этом оно может либо совпадать с количеством клеток, только что закрашенных другим игроком, либо превосходить его на один. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

Ответ: Выигрывает второй игрок — Вася.

Решение: Он ходит симметрично сопернику относительно центра поля. Таким образом, после каждого его хода позиция на поле симметрична относительно центра, а значит на любой ход соперника у него снова есть симметричный ответ. Следовательно, остаться без хода может только второй, значит, первый выигрывает.

4. (3 балла) Существует ли натуральное пятизначное натуральное число с суммой цифр 31, которое делится на 31? *Ответ:* Да, например $93775 = 31 \cdot 3025$.

Решение: Вообще говоря, решение заключено в ответе, но давайте поясним как найти такое число. Сумма цифра произведения даёт такой же остаток при делении на 9, как и сумма исходных чисел. Представим 23 в виде разности числа, кратного 5 и числа, кратного девяти: $31 = 5 \cdot 8 - 9$. Значит, нам нужно подобрать трёхзначный множитель с суммой цифр 10.

Существует несколько десятков подходящих чисел.

5. (3 балла) Точки A и C взяты по разные стороны от прямой BD. Отрезки AE и CH — перпендикуляры, опущенные на отрезок AC из точек A и C соответственно. Оказалось, что $DE = HE = BH$ и $CE = AD$. Докажите, что $AB = CD$.

Доказательство: В треугольнике ADH отрезок AE является медианой и высотой, следовательно, $AD = AH$. Аналогично в треугольнике BCE выполняется равенство $DC = CE$. Кроме того, $CE = AD$ и $DH = AB$, значит, эти треугольники равны по третьему признаку. Отсюда $\angle ADB = \angle DBC$. Таким образом, получается что треугольники ADB и CBD равны по первому признаку, откуда следует требуемое равенство.

6. (3 балла) Дан ребус: РЕКА + КАРЕ = АБВАД. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите значение буквы Б.

Ответ: 2

Решение: Ребус можно переписать как АБВАД $=($ КА + РЕ $) \cdot 101$. Во-первых, это значит, что последняя цифра КА + РЕ — это Д. Во-вторых, если КА + РЕ < 100, результат будет четырёхзначным. Пусть КА + РЕ $= 1X$Д, где X — какая-то цифра.

Тогда АБВАД $= 1X$Д$00 + 1X$Д. Если Д < 9, то вторая и четвёртая цифры этого числа должны совпадать, но они не совпадают. Значит, Д $= 9$ и вторая цифра числа АБВАД оказывается на 1 больше четвёртой. Но А это 1, значит Б это 2.

Примеров множество, например, 5861+6158=12019

7. (4 балла) У Алисы и Боба есть три равных отрезка. Сначала Алиса ломает один из отрезков на две части. Затем Боб ломает другой из исходных отрезков на две любые части. В результате получается пять отрезков, из которых десятью способами можно выбрать три отрезка. Алиса выигрывает, если хотя бы 4 из этих десяти способов дают тройки отрезков, образующие треугольник. В противном случае выигрывает Боб. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

Ответ: Выигрывает Алиса.

Решение: Воспользуемся неравенством треугольника: чтобы можно было составить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы большая сторона треугольника была меньше суммы двух оставшихся.

Пусть исходные отрезки имеют длину 1. Алиса ломает один из отрезков на две равные части. Пусть Боб ломает свой отрезок на части длины x и $1-x$, пусть также для определённости $x < 1-x$. $1 - x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, то есть эта тройка образует треугольник. Также образует треугольник тройка из отрезков Алисы и меньшего отрезка Боба. Ещё две подходящих тройки получаются, когда мы берём отрезки 1, $1-x$ и $\frac{1}{2}$.

8. (4 балла) Треугольник разбит на 1000 треугольников. В каком наименьшем количестве различных точек могут находиться вершины этих треугольников?

Ответ: 503

Решение: Сумма углов треугольника 180°, тысячи треугольников — 180000°. Откуда взялись лишние 179820°? Каждая внутренняя вершина, в которой сходятся только углы треугольников, добавляет 360°. Каждая вершина на стороне исходного треугольника или на стороне одного из треугольников разбиения добавляет 180°. Для достижения минимума необходимо, чтобы точек первого типа было как можно больше. $179820 : 360 = 499{,}5$. Значит, нам нужно 499 точек первого типа и одна точка второго типа. Пример строится последовательным добавлением новых точек внутрь (не на границу) уже имеющихся треугольников и одной точки на границу.

Добавляя три вершины исходного треугольника, получаем ответ 503.