11 класс

1 вариант

1. (2 балла) Решите уравнение $p^3 - q^3 = 11r$, где p, q, r — простые числа.

Решение: Если все три искомых числа нечётные или нечётное ровно одно из них, то правая и левая части разной чётности. Случай, когда все три числа равны двум, также не подходит. Значит, среди наших чисел ровно одна двойка. Кроме того, $p > q$, поэтому двойка это либо r, либо q.

Пусть $r = 2$. Тогда $p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2) = 2 \cdot 11$. Второй множитель очевидно больше первого и ни один из них не равен 1, таким образом $p = q+2$ и $3q^2+6q+4 = 11$. Данное квадратное уравнение относительно q не имеет натуральных решеий.

Второй случай: $q = 2$. Тогда $p^3 - 2^3 = (p-2)(p^2+2p+4) = 11r$. Очевидно, $p = 3$ не подходит, так что один из множителей в $(p-2)(p^2+2p+4)$ это 11, а вторй r. У квадратного уравнения $p^2+2p+4 = 11$ нет натуральных решений, значит остаётся вариант $p-2 = 11$, т.е. $p = 13$. Отсюда получаем $r = 199$.

2. (2 балла) Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 4x\sin y - 4\cos^2 y$.

Ответ: -4.

Решение: Добавим и вычтем $4\sin^2 y$. Получаем выражение $x^2 + 4x\sin y + 4\sin^2 y - 4 = (x + 2\sin y)^2 - 4$. Очевидно, это выражение имеет минимум, равный -4.

Идея решения 2: Чтобы найти наименьшее значение, можно взять производные от этого выражения по x и по y и найти точку, где обе эти производные равны нулю. Производная по x равна нулю, когда $x = -2\sin y$.

Производная по y равна $4x\cos y + 8\sin y\cos y$. Она равна нулю в двух случаях: когда $x = -2\sin y$ и когда $\cos y = 0$. После этого необходимо разобраться, в каких из этих точек действительно локальный минимум и почему глобальный минимум существует.

Корректное доказательство этого в терминах производных, к сожалению, выходит за рамки школьной программы, поэтому для учащихся школ это решение может служить скорее всего только подсказкой к ответу и к решению, изложенному выше.

3. (3 балла) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ — натуральные числа, большие 1 (не обязательно различные). В таблице 100×100 расставлены числа следующим образом: на пересечении i-ой строки и k-го столбца записано число $\log_{x_k} \frac{x_i}{4}$. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

Ответ: -10000

Решение: $\log_{x_k} \frac{x_i}{4} = \log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 4$. Сложим уменьшаемое с аналогичным уменьшаемым в симметричной ячейке: $\log_{x_k} x_i + \log_{x_i} x_k = \log_{x_k} x_i + \dfrac{1}{\log_{x_k} x_i} \geqslant 2$, поскольку данный логарифм положителен. Если же $i = k$, то этот логарифм равен единице.

Таким образом, сумма уменьшаемых во всех выражениях $\log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 4$ не меньше количества ячеек, т.е. 100^2. Вычитаемые же максимальны при минимальном $x_k = 2$ и равны 2. Следовательно, сумма чисел во всей таблице не меньше $100^2(1-2) = -100^2$ и равенство достигается когда все $x_k = 2$.

4. (3 балла) Дана функция $f(x) = P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени 1000 с положительнымии коэффициентами. Пусть $g(x)$ — сороковая производная $f(x)$. Докажите, что $\dfrac{g(1000)}{f(1000)} < 2^{40}$.

Доказательство: Рассмотрим какой-то одночлен $a_k x^k$. Его n-ая производная равна $k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k x^{k-n}$, а поскольку и k, и n не больше тысячи, эта производная не превосходит $1000^n a_k x^{k-n}$, причём равенство достигается только когда $n = 1$ и $k = 1000$. Значит, аналогичное неравенство верно и для суммы одночленов. Подставляем вместо x число 1000, и получаем, что $P(1000) \geqslant P^{(k)}(1000)$.

По индукции легко доказать выполнение следующего равенства: $(P(x)e^x)^{(n)} = e^x(C_n^0 P(x) + C_n^1 P'(x) + \ldots + C_n^n P^{(n)}(x))$. Тогда, воспользовавшись доказанным в предыдущем абзаце, получаем, что $g(1000) = (P(x)e^x)^{(40)}(1000) = e^{1000}\left(C_{40}^0 P(1000) + C_{40}^1 P'(1000) + \ldots + C_{40}^{40} P^{(40)}(1000)\right) \leqslant e^{1000}\left(C_{40}^0 P(1000) + C_{40}^1 P(1000) + \ldots + C_{40}^{40} P^{(1000)}\right) \leqslant e^{1000}\left(C_{40}^0 + C_{40}^1 + \ldots + C_{40}^{40}\right) P(1000) = 2^{40} e^{1000} P(1000) 2^{40} f(1000)$. Кроме того, заметим, что поскольку в данной сумме встречается не только первая производная, хотя бы одно из суммируемых нами равенств на самом деле строгое, поэтому мы можем заменить знак $\leqslant$ на $<$.

Таким образом, мы получили, что $g(1000) < 2^{40} f(1000)$, откуда делением на $f(1000)$ получаем требуемое неравенство.

5. (3 балла) Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$. CD — меньшее основание, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на AB. Докажите, что биссектриса угла A пересекает отрезок CH.

Доказательство: Пусть $CD = a$, $AD = BC = b$. Тогда, по признаку описанного четырёхугольника, $AB = 2b - a$. Тогда $BH = \frac{AB-CD}{2} = b - a$. Отсюда по теореме Пифагора находим $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{b^2 - (b-a)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab} > a$.

Далее, $AH = AB - BH = b$. Значит, треугольник ADH равнобедренный и биссектриса угла A является в нём серединным перпендикуляром к DH. Но тогда это и серединный перпендикуляр в треугольнике CDH, а серединный перпендикуляр к стороне треугольника пересекает большую из оставшихся сторон, то есть BH.

6. (3 балла) Сфера радиуса 10 вписана в каркас тетраэдра (т.е. касается всех его рёбер). Сумма длин рёбер тетраэдра составляет 180. Докажите, что объём тетраэдра не превосходит 3000.

Доказательство: Обозначим наш тетраэдр $ABCD$, центр сферы, вписанной в каркас, за O, а саму сферу за S. Объём тетраэдра равен сумме объёмов маленьких тетраэдров $OABC$, $OABD$, $OACD$ и $OBCD$.

Пересечение S и плоскости ABC это вписанная окружность треугольника ABC. Обозначим за I её центр, тогда OI — высота тетраэдра $OABC$. Пусть R — радиус сферы S, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC, тогда выполняется равенство $R^2 = OI^2 + r^2$.

$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot p_{ABC} \cdot r$, где p_{ABC} — полупериметр треугольника ABC.

По неравенству о среднем геометрическом и среднем квадратичном $\sqrt{OI \cdot r} \leqslant \sqrt{\dfrac{OI^2 + r^2}{2}}$, то есть $OI \cdot r \leqslant \dfrac{OI^2 + r^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$. Таким образом, $V_{OABC} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 p_{ABC}$.

Складывая объёмы четырёх маленьких тетраэдров мы получаем $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 \cdot (p_{ABC} + p_{ABD} + p_{ACD} + p_{BCD})$, а сумма полупериметров граней это в точности сумма длин рёбер тетрадра. Значит, $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot 10^2 \cdot 180 = 3000$, что и требовалось.

7. (4 балла) Докажите, что не существует функции $f(x)$, определённой для всех $x > 1$, такой, что $f(x^2) = 2f(x)$ и $f(x + \frac{1}{x}) = f(x) + 3$.

Доказательство: С одной стороны, $f\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f(x^2) + 3 = 2f(x) + 3$.

С другой стороны, $f\left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f\left(\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2\right) = 2f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 2(f(x) + 3) = 2f(x) + 6$.

Сравнивая эти равенства, получаем, что для любого числа y, представимого в виде $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ при $x > 1$, то есть для любого $y > 2$, выполняется равенство $f(y + 2) = f(y) + 3$.

Тогда $2f(3) = f(3^2) = f(9) = f(3 + 2 \cdot 3) = f(3) + 9$, откуда $f(3) = 9$. Следовательно, $f(5) = f(3) + 3 = 12$. С другой стороны, $2f(5) = f(25) = f(5 + 2 \cdot 10) = f(5) + 30$, откуда $f(5) = 30 \neq 12$.

Получаем противоречие, значит такой функции действительно не существует.

8. (5 баллов) Родоначальник дворянского рода получил участок земли. Каждый из мужчин в роду умирая делил доставшуюся ему землю поровну между своими сыновьями. Если же сыновей у него не было, земля переходила к государству. Больше никто из членов рода никаким образом не получал или не лишался своей земли. Всего в роду было 180 человек. Какую наименьшую долю исходного участка мог получить кто-либо из членов рода?

Ответ: $\dfrac{1}{2 \cdot 3^{59}}$

Решение: Рассмотрим человека с самой наименьшей долей. Пусть у его отца было a_1 сыновей, у деда — a_2 и так далее до основателя рода, у которого было a_n. Тогда доля этого человека составляет $\dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$, причём нам известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ не превосходит 179 (поскольку основатель рода в эту сумму точно не входит).

Таким образом, мы ищем набор чисел с суммой, не превосходящей 179 и максимальным произведением. Докажем, что любой набор, кроме набора, состоящего из 59 троек и одной двойки, не обладает максимальным произведением, так как его можно увеличить,

Во-первых, если сумма чисел в наборе меньше 179, добавим туда ещё одно число, чтобы сделать её равной 179. Произведение от этого не уменьшится.

Во-вторых, пусть в нашем наборе есть число $a \geqslant 4$. Заменим a на пару чисел b и c больших единицы, таких, что $b + c = a$. Докажем, что $bc \geqslant b + c$. Действительно, $bc - b - c = (b-1)(c-1) - 1$, что неотрицательно при b и c больших единицы.

В-третьих, если среди набора есть число 1, то можно заменить любое число a и 1 на $a + 1$, отчего произведение этих чисел увеличится на 1.

Таким образом, любой набор можно преобразовать в набор из двоек и троек, не уменьшая произведения его чисел.

Далее, пусть количество двоек хотя бы три, тогда их произведение равно 8. Если же мы заменим три двойки на две тройки, сумма чисел не изменится, а произведение станет равно 9, то есть опять-таки увеличится. Таким образом можно добится того, чтобы количество двоек стало не больше двух.

Поскольку $179 = 59 \cdot 3 + 2$, в итоговом наборе будет ровно одна двойка.

Итак, любой набор натуральных чисел с суммой, не превосходящей 179, можно преобразовать в набор из 59 троек и одной двойки, и при этом произведение чисел в наборе не уменьшится. Значит, полученный в итоге набор обладает наибольшим произведением, равным $3^{59} \cdot 2$, что даёт нам наименьшую долю наследства обратную к этому числу.

11 класс
2 вариант

1. (2 балла) Решите уравнение $p^3 - q^3 = 5r$, где p, q, r — простые числа.

Ответ: $p = 7$, $q = 2$, $r = 67$.

Решение: Если все три искомых числа нечётные или нечётное ровно одно из них, то правая и левая части разной чётности. Случай, когда все три числа равны двум, также не подходит. Значит, среди наших чисел ровно одна двойка. Кроме того, $p > q$, поэтому двойка это либо r, либо q.

Пусть $r = 2$. Тогда $p^3 - q^3 = (p-q)(p^2 + pq + q^2) = 5 \cdot 11$. Второй множитель очевидно больше первого и ни один из них не равен 1, таким образом $p = q + 2$ и $3q^2 + 6q + 4 = 5$. Данное квадратное уравнение относительно q не имеет натуральных решеий.

Второй случай: $q = 2$. Тогда $p^3 - 2^3 = (p-2)(p^2 + 2p + 4) = 5r$. Очевидно, $p = 3$ не подходит, так что один из множителей в $(p-2)(p^2+2p+4)$ это 5, а вторй r. У квадратного уравнения $p^2 + 2p + 4 = 5$ нет натуральных решений, значит остаётся вариант $p - 2 = 5$, т.е. $p = 7$. Отсюда получаем $r = 67$.

2. (2 балла) Найдите наименьшее значение выражения $x^2 - 6x\sin y - 9\cos^2 y$.

Ответ: -9.

Решение: Добавим и вычтем $9\sin^2 y$. Получаем выражение $x^2 - 6x\sin y + 9\sin^2 y - 9 = (x - 3\sin y)^2 - 9$. Очевидно, это выражение имеет минимум, равный -9.

Идея решения 2: Чтобы найти наименьшее значение, можно взять производные от этого выражения по x и по y и найти точку, где обе эти производные равны нулю. Производная по x равна нулю, когда $x = 3\sin y$.

Производная по y равна $-6x\cos y + 18\sin y\cos y$. Она равна нулю в двух случаях: когда $x = 3\sin y$ и когда $\cos y = 0$. После этого необходимо разобраться, в каких из этих точек действительно локальный минимум и почему глобальный минимум существует.

Корректное доказательство этого в терминах производных, к сожалению, выходит за рамки школьной программы, поэтому для учащихся школ это решение может служить скорее всего только подсказкой к ответу и к решению, изложенному выше.

3. (3 балла) Пусть x_1, x_2, ..., x_{60} — натуральные числа, большие 1 (не обязательно различные). В таблице 60×60 расставлены числа следующим образом: на пересечении i-ой строки и k-го столбца записано число $\log_{x_k} \frac{x_i}{8}$. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

Ответ: -7200

Решение: $\log_{x_k} \frac{x_i}{8} = \log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 8$. Сложим уменьшаемое с аналогичным уменьшаемым в симметричной ячейке: $\log_{x_k} x_i + \log_{x_i} x_k = \log_{x_k} x_i + \dfrac{1}{\log_{x_k} x_i} \geqslant 2$, поскольку данный логарифм положителен. Если же $i = k$, то этот логарифм равен единице.

Таким образом, сумма уменьшаемых во всех выражениях $\log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 4$ не меньше количества ячеек, т.е. 60^2. Вычитаемые же максимальны при минимальном $x_k = 2$ и равны 3. Следовательно, сумма чисел во всей таблице не меньше $60^2(1-3) = -60^2 \cdot 2$ и равенство достигается когда все $x_k = 2$.

4. (3 балла) Дана функция $f(x) = P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени 100 с положительнымии коэффициентами. Пусть $g(x)$ — двадцатая производная $f(x)$. Докажите, что $\dfrac{g(100)}{f(100)} < 2^{20}$.

Доказательство: Рассмотрим какой-то одночлен $a_k x^k$. Его n-ая производная равна $k(k-1)\dots(k-n+1)a_k x^{k-n}$, а поскольку и k, и n не больше ста, эта производная не превосходит $100^n a_k x^{k-n}$, причём равенство достигается только когда $n = 1$ и $k = 100$. Значит, аналогичное неравенство верно и для суммы одночленов. Подставляем вместо x число 100, и получаем, что $P(100) \geqslant P^{(k)}(100)$.

По индукции легко доказать выполнение следующего равенства: $(P(x)e^x)^{(n)} = e^x(C_n^0 P(x) + C_n^1 P'(x) + \ldots + C_n^n P^{(n)}(x))$. Тогда, воспользовавшись доказанным в предыдущем абзаце, получаем, что $g(100) = (P(x)e^x)^{(20)}(100) = e^{100}\left(C_{20}^0 P(100) + C_{20}^1 P'(100) + \ldots + C_{20}^{20} P^{(20)}(100)\right) \leqslant e^{100}\left(C_{20}^0 P(100) + C_{20}^1 P(100) + \ldots + C_{20}^{20} P^{(100)}\right) \leqslant e^{100}\left(C_{20}^0 + C_{20}^1 + \ldots + C_{20}^{20}\right) P(100) = 2^{20} e^{100} P(100) = 2^{20} f(100)$. Кроме того, заметим, что поскольку в данной сумме встречается не только первая производная, хотя бы одно из суммируемых нами равенств на самом деле строгое, поэтому мы можем заменить знак $\leqslant$ на $<$.

Таким образом, мы получили, что $g(100) < 2^{20} f(100)$, откуда делением на $f(100)$ получаем требуемое неравенство.

5. (3 балла)

Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$. BC — меньшее основание, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на AD. Докажите, что биссектриса угла D пересекает отрезок BH.

Доказательство: Пусть $BC = a$, $AB = CD = b$. Тогда, по признаку описанного четырёхугольника, $AD = 2b - a$. Тогда $AH = \frac{AD - BC}{2} = b - a$. Отсюда по теореме Пифагора находим $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - (b-a)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab} > a$.

Далее, $DH = AB - AH = b$. Значит, треугольник CDH равнобедренный и биссектриса угла D является в нём серединным перпендикуляром к CH. Но тогда это и серединный перпендикуляр в треугольнике CBH, а серединный перпендикуляр к стороне треугольника пересекает большую из оставшихся сторон, то есть BH.

6. (3 балла) Сфера радиуса 3 вписана в каркас тетраэдра (т.е. касается всех его рёбер). Сумма длин рёбер тетраэдра составляет 60. Докажите, что объём тетраэдра не превосходит 90.

Доказательство: Обозначим наш тетраэдр $ABCD$, центр сферы, вписанной в каркас, за O, а саму сферу за S. Объём тетраэдра равен сумме объёмов маленьких тетраэдров $OABC$, $OABD$, $OACD$ и $OBCD$.

Пересечение S и плоскости ABC это вписанная окружность треугольника ABC. Обозначим за I её центр, тогда OI — высота тетраэдра $OABC$. Пусть R — радиус сферы S, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC, тогда выполняется равенство $R^2 = OI^2 + r^2$.

$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot p_{ABC} \cdot r$, где p_{ABC} — полупериметр треугольника ABC.

По неравенству о среднем геометрическом и среднем квадратичном $\sqrt{OI \cdot r} \leqslant \sqrt{\dfrac{OI^2 + r^2}{2}}$, то есть $OI \cdot r \leqslant \dfrac{OI^2 + r^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$. Таким образом, $V_{OABC} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 p_{ABC}$.

Складывая объёмы четырёх маленьких тетраэдров мы получаем $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 \cdot (p_{ABC} + p_{ABD} + p_{ACD} + p_{BCD})$, а сумма полупериметров граней это в точности сумма длин рёбер тетрадра. Значит, $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot 3^2 \cdot 60 = 90$, что и требовалось.

7. (4 балла) Докажите, что не существует функции $f(x)$, определённой для всех $x > 1$, такой, что $f(x^2) = 3f(x)$ и $f(x + \frac{1}{x}) = f(x) + 2$.

Доказательство: С одной стороны, $f\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f(x^2) + 2 = 3f(x) + 2$.

С другой стороны, $f\left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f\left(\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2\right) = 3f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 3(f(x) + 2) = 3f(x) + 6$.

Сравнивая эти равенства, получаем, что для любого числа y, представимого в виде $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ при $x > 1$, то есть для любого $y > 2$, выполняется равенство $f(y + 2) = f(y) + 4$.

Тогда $3f(3) = f(3^2) = f(9) = f(3 + 2 \cdot 3) = f(3) + 12$, откуда $f(3) = 6$. Следовательно, $f(5) = f(3) + 4 = 10$. С другой стороны, $3f(5) = f(25) = f(5 + 2 \cdot 10) = f(5) + 40$, откуда $f(5) = 20 \neq 10$.

Получаем противоречие, значит такой функции действительно не существует.

8. (5 баллов) Родоначальник дворянского рода получил участок земли. Каждый из мужчин в роду умирая делил доставшуюся ему землю поровну между своими сыновьями. Если же сыновей у него не было, земля переходила к государству. Больше никто из членов рода никаким образом не получал или не лишался своей земли. Всего в роду было 120 человек. Какую наименьшую долю исходного участка мог получить кто-либо из членов рода?

Ответ: $\dfrac{1}{2 \cdot 3^{39}}$

Решение: Рассмотрим человека с самой наименьшей долей. Пусть у его отца было a_1 сыновей, у деда — a_2 и так далее до основателя рода, у которого было a_n. Тогда доля этого человека составляет $\dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$, причём нам известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ не превосходит 119 (поскольку основатель рода в эту сумму точно не входит).

Таким образом, мы ищем набор чисел с суммой, не превосходящей 119 и максимальным произведением. Докажем, что любой набор, кроме набора, состоящего из 39 троек и одной двойки, не обладает максимальным произведением, так как его можно увеличить,

Во-первых, если сумма чисел в наборе меньше 119, добавим туда ещё одно число, чтобы сделать её равной 119. Произведение от этого не уменьшится.

Во-вторых, пусть в нашем наборе есть число $a \geqslant 4$. Заменим a на пару чисел b и c больших единицы, таких, что $b + c = a$. Докажем, что $bc \geqslant b + c$. Действительно, $bc - b - c = (b - 1)(c - 1) - 1$, что неотрицательно при b и c больших единицы.

В-третьих, если среди набора есть число 1, то можно заменить любое число a и 1 на $a + 1$, отчего произведение этих чисел увеличится на 1.

Таким образом, любой набор можно преобразовать в набор из двоек и троек, не уменьшая произведения его чисел.

Далее, пусть количество двоек хотя бы три, тогда их произведение равно 8. Если же мы заменим три двойки на две тройки, сумма чисел не изменится, а произведение станет равно 9, то есть опять-таки увеличится. Таким образом можно добится того, чтобы количество двоек стало не больше двух.

Поскольку $119 = 39 \cdot 3 + 2$, в итоговом наборе будет ровно одна двойка.

Итак, любой набор натуральных чисел с суммой, не превосходящей 119, можно преобразовать в набор из 39 троек и одной двойки, и при этом произведение чисел в наборе не уменьшится. Значит, полученный в итоге набор обладает наибольшим произведением, равным $3^{39} \cdot 2$, что даёт нам наименьшую долю наследства обратную к этому числу.

11 класс
3 вариант

1. (2 балла) Решите уравнение $11p = q^3 - r^3$, где p, q, r — простые числа.

Ответ: $q = 13$, $r = 2$, $p = 199$.

Решение: Если все три искомых числа нечётные или нечётное ровно одно из них, то правая и левая части разной чётности. Случай, когда все три числа равны двум, также не подходит. Значит, среди наших чисел ровно одна двойка. Кроме того, $q > r$, поэтому двойка это либо r, либо p.

Пусть $p = 2$. Тогда $q^3 - r^3 = (q - r)(q^2 + qr + r^2) = 2 \cdot 11$. Второй множитель очевидно больше первого и ни один из них не равен 1, таким образом $q = r + 2$ и $3r^2 + 6r + 4 = 11$. Данное квадратное уравнение относительно r не имеет натуральных решеий.

Второй случай: $r = 2$. Тогда $q^3 - 2^3 = (q - 2)(q^2 + 2q + 4) = 11p$. Очевидно, $q = 3$ не подходит, так что один из множителей в $(q-2)(q^2+2q+4)$ это 11, а вторй p. У квадратного уравнения $q^2+2q+4 = 11$ нет натуральных решений, значит остаётся вариант $q - 2 = 11$, т.е. $q = 13$. Отсюда получаем $p = 199$.

2. (2 балла) Найдите наименьшее значение выражения $4x^2 + 4x \sin y - \cos^2 y$.

Ответ: -1.

Решение: Добавим и вычтем $\sin^2 y$. Получаем выражение $4x^2 + 4x \sin y + \sin^2 y - 1 = (x + 2 \sin y)^2 - 1$. Очевидно, это выражение имеет минимум, равный -1.

Идея решения 2: Чтобы найти наименьшее значение, можно взять производные от этого выражения по x и по y и найти точку, где обе эти производные равны нулю. Производная по x равна нулю, когда $2x = -\sin y$.

Производная по y равна $4x \cos y - 2 \sin y \cos y$. Она равна нулю в двух случаях: когда $x = -2 \sin y$ и когда $\cos y = 0$. После этого необходимо разобраться, в каких из этих точек действительно локальный минимум и почему глобальный минимум существует.

Корректное доказательство этого в терминах производных, к сожалению, выходит за рамки школьной программы, поэтому для учащихся школ это решение может служить скорее всего только подсказкой к ответу и к решению, изложенному выше.

3. (3 балла) Пусть x_1, x_2, …, x_{200} — натуральные числа, большие 2 (не обязательно различные). В таблице 200×200 расставлены числа следующим образом: на пересечении i-ой строки и k-го столбца записано число $\log_{x_k} \frac{x_i}{9}$. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

Ответ: -40000

Решение: $\log_{x_k} \frac{x_i}{4} = \log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 9$. Сложим уменьшаемое с аналогичным уменьшаемым в симметричной ячейке: $\log_{x_k} x_i + \log_{x_i} x_k = \log_{x_k} x_i + \dfrac{1}{\log_{x_k} x_i} \geqslant 2$, поскольку данный логарифм положителен. Если же $i = k$, то этот логарифм равен единице.

Таким образом, сумма уменьшаемых во всех выражениях $\log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 9$ не меньше количества ячеек, т.е. 200^2. Вычитаемые же максимальны при минимальном $x_k = 3$ и равны 2. Следовательно, сумма чисел во всей таблице не меньше $200^2(1 - 2) = -200^2$ и равенство достигается когда все $x_k = 3$.

4. (3 балла) Дана функция $f(x) = P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени 200 с положительнымии коэффициентами. Пусть $g(x)$ — десятая производная $f(x)$. Докажите, что $\dfrac{g(200)}{f(200)} < 1024$.

Доказательство: Рассмотрим какой-то одночлен $a_k x^k$. Его n-ая производная равна $k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k x^{k-n}$, а поскольку и k, и n не больше двухсот, эта производная не превосходит $200^n a_k x^{k-n}$, причём равенство достигается только когда $n = 1$ и $k = 200$. Значит, аналогичное неравенство верно и для суммы одночленов. Подставляем вместо x число 200, и получаем, что $P(200) \geqslant P^{(k)}(200)$.

По индукции легко доказать выполнение следующего равенства: $(P(x)e^x)^{(n)} = e^x(C_n^0 P(x) + C_n^1 P'(x) + \ldots + C_n^n P^{(n)}(x))$. Тогда, воспользовавшись доказанным в предыдущем абзаце, получаем, что $g(200) = (P(x)e^x)^{(10)}(200) = e^{200}\left(C_{10}^0 P(200) + C_{10}^1 P'(200) + \ldots + C_{10}^{10} P^{(10)}(200)\right) \leqslant e^{200}\left(C_{10}^0 P(200) + C_{10}^1 P(200) + \ldots + C_{10}^{10} P^{(200)}\right) \leqslant e^{200}\left(C_{10}^0 + C_{10}^1 + \ldots + C_{10}^{10}\right) P(200) = 2^{10} e^{200} P(200) 2^{10} f(200)$. Кроме того, заметим, что поскольку в данной сумме встречается не только первая производная, хотя бы одно из суммируемых нами равенств на самом деле строгое, поэтому мы можем заменить знак $\leqslant$ на $<$.

Таким образом, мы получили, что $g(200) < 2^{10} f(200)$, откуда делением на $f(200)$ получаем требуемое неравенство.

5. (3 балла) Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$. BC — большее основание, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на BC. Докажите, что биссектриса угла B пересекает отрезок DH.

Доказательство: Пусть $AD = a$, $AB = CD = b$. Тогда, по признаку описанного четырёхугольника, $BC = 2b - a$. Тогда $CH = \frac{BC-AD}{2} = b - a$. Отсюда по теореме Пифагора находим $DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{b^2 - (b-a)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab} > a$.

Далее, $BH = BC - CH = b$. Значит, треугольник ABH равнобедренный и биссектриса угла B является в нём серединным перпендикуляром к AH. Но тогда это и серединный перпендикуляр в треугольнике ADH, а серединный перпендикуляр к стороне треугольника пересекает большую из оставшихся сторон, то есть DH.

6. (3 балла) Сфера радиуса 12 вписана в каркас тетраэдра (т.е. касается всех его рёбер). Сумма длин рёбер тетраэдра составляет 300. Докажите, что объём тетраэдра не превосходит 7200.

Доказательство: Обозначим наш тетраэдр $ABCD$, центр сферы, вписанной в каркас, за O, а саму сферу за S. Объём тетраэдра равен сумме объёмов маленьких тетраэдров $OABC$, $OABD$, $OACD$ и $OBCD$.

Пересечение S и плоскости ABC это вписанная окружность треугольника ABC. Обозначим за I её центр, тогда OI — высота тетраэдра $OABC$. Пусть R — радиус сферы S, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC, тогда выполняется равенство $R^2 = OI^2 + r^2$.

$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot p_{ABC} \cdot r$, где p_{ABC} — полупериметр треугольника ABC.

По неравенству о среднем геометрическом и среднем квадратичном $\sqrt{OI \cdot r} \leqslant \sqrt{\dfrac{OI^2 + r^2}{2}}$, то есть $OI \cdot r \leqslant \dfrac{OI^2 + r^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$. Таким образом, $V_{OABC} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 p_{ABC}$.

Складывая объёмы четырёх маленьких тетраэдров мы получаем $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 \cdot (p_{ABC} + p_{ABD} + p_{ACD} + p_{BCD})$, а сумма полупериметров граней это в точности сумма длин рёбер тетрадра. Значит, $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot 12^2 \cdot 300 = 7200$, что и требовалось.

7. (4 балла) Докажите, что не существует функции $f(x)$, определённой для всех $x > 1$, такой, что $f(x^2) = 2f(x)$ и $f(x + \frac{1}{x}) = f(x) + 5$.

Доказательство: С одной стороны, $f\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f(x^2) + 5 = 2f(x) + 5$.

С другой стороны, $f\left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f\left(\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2\right) = 2f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 2(f(x) + 5) = 2f(x) + 10$.

Сравнивая эти равенства, получаем, что для любого числа y, представимого в виде $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ при $x > 1$, то есть для любого $y > 2$, выполняется равенство $f(y + 2) = f(y) + 5$.

Тогда $2f(3) = f(3^2) = f(9) = f(3 + 2 \cdot 3) = f(3) + 15$, откуда $f(3) = 15$. Следовательно, $f(5) = f(3) + 5 = 20$. С другой стороны, $2f(5) = f(25) = f(5 + 2 \cdot 10) = f(5) + 50$, откуда $f(5) = 50 \neq 20$.

Получаем противоречие, значит такой функции действительно не существует.

8. (5 баллов) Родоначальник дворянского рода получил участок земли. Каждый из мужчин в роду умирая делил доставшуюся ему землю поровну между своими сыновьями. Если же сыновей у него не было, земля переходила к государству. Больше никто из членов рода никаким образом не получал или не лишался своей земли. Всего в роду было 150 человек. Какую наименьшую долю исходного участка мог получить кто-либо из членов рода?

Ответ: $\dfrac{1}{2 \cdot 3^{49}}$

Решение: Рассмотрим человека с самой наименьшей долей. Пусть у его отца было a_1 сыновей, у деда — a_2 и так далее до основателя рода, у которого было a_n. Тогда доля этого человека составляет $\dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$, причём нам известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ не превосходит 149 (поскольку основатель рода в эту сумму точно не входит).

Таким образом, мы ищем набор чисел с суммой, не превосходящей 149 и максимальным произведением. Докажем, что любой набор, кроме набора, состоящего из 49 троек и одной двойки, не обладает максимальным произведением, так как его можно увеличить,

Во-первых, если сумма чисел в наборе меньше 149, добавим туда ещё одно число, чтобы сделать её равной 149. Произведение от этого не уменьшится.

Во-вторых, пусть в нашем наборе есть число $a \geqslant 4$. Заменим a на пару чисел b и c больших единицы, таких, что $b + c = a$. Докажем, что $bc \geqslant b + c$. Действительно, $bc - b - c = (b-1)(c-1) - 1$, что неотрицательно при b и c больших единицы.

В-третьих, если среди набора есть число 1, то можно заменить любое число a и 1 на $a + 1$, отчего произведение этих чисел увеличится на 1.

Таким образом, любой набор можно преобразовать в набор из двоек и троек, не уменьшая произведения его чисел.

Далее, пусть количество двоек хотя бы три, тогда их произведение равно 8. Если же мы заменим три двойки на две тройки, сумма чисел не изменится, а произведение станет равно 9, то есть опять-таки увеличится. Таким образом можно добится того, чтобы количество двоек стало не больше двух.

Поскольку $149 = 49 \cdot 3 + 2$, в итоговом наборе будет ровно одна двойка.

Итак, любой набор натуральных чисел с суммой, не превосходящей 149, можно преобразовать в набор из 49 троек и одной двойки, и при этом произведение чисел в наборе не уменьшится. Значит, полученный в итоге набор обладает наибольшим произведением, равным $3^{49} \cdot 2$, что даёт нам наименьшую долю наследства обратную к этому числу.

11 класс
4 вариант

1. (2 балла) Решите уравнение $5p = q^3 - r^3$, где p, q, r — простые числа.

Ответ: $q = 7$, $r = 2$, $p = 67$.

Решение: Если все три искомых числа нечётные или нечётное ровно одно из них, то правая и левая части разной чётности. Случай, когда все три числа равны двум, также не подходит. Значит, среди наших чисел ровно одна двойка. Кроме того, $q > r$, поэтому двойка это либо r, либо p.

Пусть $p = 2$. Тогда $q^3 - r^3 = (q-r)(q^2 + qr + r^2) = 2 \cdot 5$. Второй множитель очевидно больше первого и ни один из них не равен 1, таким образом $q = r + 2$ и $3r^2 + 6r + 4 = 5$. Данное квадратное уравнение относительно r не имеет натуральных решеий.

Второй случай: $r = 2$. Тогда $q^3 - 2^3 = (q-2)(q^2 + 2q + 4) = 5p$. Очевидно, $q = 3$ не подходит, так что один из множителей в $(q-2)(q^2+2q+4)$ это 5, а вторй p. У квадратного уравнения $q^2 + 2q + 4 = 5$ нет натуральных решений, значит остаётся вариант $q - 2 = 5$, т.е. $q = 7$. Отсюда получаем $p = 67$.

2. (2 балла) Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 8x \sin y - 16 \cos^2 y$.

Ответ: -16.

Решение: Добавим и вычтем $16 \sin^2 y$. Получаем выражение $x^2 + 8x \sin y + 16 \sin^2 y - 16 = (x + 4 \sin y)^2 - 16$. Очевидно, это выражение имеет минимум, равный -4.

Идея решения 2: Чтобы найти наименьшее значение, можно взять производные от этого выражения по x и по y и найти точку, где обе эти производные равны нулю. Производная по x равна нулю, когда $x = -4 \sin y$.

Производная по y равна $4x \cos y - 8 \sin y \cos y$. Она равна нулю в двух случаях: когда $x = -4 \sin y$ и когда $\cos y = 0$. После этого необходимо разобраться, в каких из этих точек действительно локальный минимум и почему глобальный минимум существует.

Корректное доказательство этого в терминах производных, к сожалению, выходит за рамки школьной программы, поэтому для учащихся школ это решение может служить скорее всего только подсказкой к ответу и к решению, изложенному выше.

3. (3 балла) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ — натуральные числа, большие 1 (не обязательно различные). В таблице 80×80 расставлены числа следующим образом: на пересечении i-ой строки и k-го столбца записано число $\log_{x_k} \frac{x_i}{16}$. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

Ответ: -19200

Решение: $\log_{x_k} \frac{x_i}{16} = \log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 16$. Сложим уменьшаемое с аналогичным уменьшаемым в симметричной ячейке: $\log_{x_k} x_i + \log_{x_i} x_k = \log_{x_k} x_i + \dfrac{1}{\log_{x_k} x_i} \geqslant 2$, поскольку данный логарифм положителен. Если же $i = k$, то этот логарифм равен единице.

Таким образом, сумма уменьшаемых во всех выражениях $\log_{x_k} x_i - \log_{x_k} 16$ не меньше количества ячеек, т.е. 80^2. Вычитаемые же максимальны при минимальном $x_k = 2$ и равны 4. Следовательно, сумма чисел во всей таблице не меньше $80^2(1-4) = -80^2 \cdot 3 = -19200$ и равенство достигается когда все $x_k = 2$.

4. (3 балла) Дана функция $f(x) = P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени 100 с положительнымии коэффициентами. Пусть $g(x)$ — тридцатая производная $f(x)$. Докажите, что $\dfrac{g(100)}{f(100)} < 2^{30}$.

Доказательство: Рассмотрим какой-то одночлен $a_k x^k$. Его n-ая производная равна $k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k x^{k-n}$, а поскольку и k, и n не больше ста, эта производная не превосходит $100^n a_k x^{k-n}$, причём равенство достигается только когда $n = 1$ и $k = 100$. Значит, аналогичное неравенство верно и для суммы одночленов. Подставляем вместо x число 100, и получаем, что $P(100) \geqslant P^{(k)}(100)$.

По индукции легко доказать выполнение следующего равенства: $(P(x)e^x)^{(n)} = e^x(C_n^0 P(x) + C_n^1 P'(x) + \ldots + C_n^n P^{(n)}(x))$. Тогда, воспользовавшись доказанным в предыдущем абзаце, получаем, что $g(100) = (P(x)e^x)^{(30)}(100) = e^{100}\left(C_{30}^0 P(100) + C_{30}^1 P'(100) + \ldots + C_{30}^{30} P^{(30)}(100)\right) \leqslant e^{100}\left(C_{30}^0 P(100) + C_{30}^1 P(100) + \ldots + C_{30}^{30} P^{(100)}\right) \leqslant e^{100}\left(C_{30}^0 + C_{30}^1 + \ldots + C_{30}^{30}\right) P(100) = 2^{30} e^{100} P(100) 2^{30} f(100)$. Кроме того, заметим, что поскольку в данной сумме встречается не только первая производная, хотя бы одно из суммируемых нами равенств на самом деле строгое, поэтому мы можем заменить знак $\leqslant$ на $<$.

Таким образом, мы получили, что $g(100) < 2^{30} f(100)$, откуда делением на $f(100)$ получаем требуемое неравенство.

5. (3 балла) Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$. CD — большее основание, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на CD. Докажите, что биссектриса угла C пересекает отрезок AH.

Доказательство: Пусть $AB = a$, $AD = BC = b$. Тогда, по признаку описанного четырёхугольника, $CD = 2b - a$. Тогда $DH = \frac{CD - AB}{2} = b - a$. Отсюда по теореме Пифагора находим $CH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{b^2 - (b-a)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab} > a$.

Далее, $CH = CD - DH = b$. Значит, треугольник DCH равнобедренный и биссектриса угла C является в нём серединным перпендикуляром к AH. Но тогда это и серединный перпендикуляр в треугольнике ABH, а серединный перпендикуляр к стороне треугольника пересекает большую из оставшихся сторон, то есть AH.

6. (3 балла) Сфера радиуса 5 вписана в каркас тетраэдра (т.е. касается всех его рёбер). Сумма длин рёбер тетраэдра составляет 120. Докажите, что объём тетраэдра не превосходит 500.

Доказательство: Обозначим наш тетраэдр $ABCD$, центр сферы, вписанной в каркас, за O, а саму сферу за S. Объём тетраэдра равен сумме объёмов маленьких тетраэдров $OABC$, $OABD$, $OACD$ и $OBCD$.

Пересечение S и плоскости ABC это вписанная окружность треугольника ABC. Обозначим за I её центр, тогда OI — высота тетраэдра $OABC$. Пусть R — радиус сферы S, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC, тогда выполняется равенство $R^2 = OI^2 + r^2$.

$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot OI \cdot p_{ABC} \cdot r$, где p_{ABC} — полупериметр треугольника ABC.

По неравенству о среднем геометрическом и среднем квадратичном, $\sqrt{OI \cdot r} \leqslant \sqrt{\dfrac{OI^2 + r^2}{2}}$, то есть $OI \cdot r \leqslant \dfrac{OI^2 + r^2}{2} = \dfrac{R^2}{2}$. Таким образом, $V_{OABC} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 p_{ABC}$.

Складывая объёмы четырёх маленьких тетраэдров мы получаем $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot R^2 \cdot (p_{ABC} + p_{ABD} + p_{ACD} + p_{BCD})$, а сумма полупериметров граней это в точности сумма длин рёбер тетрадра. Значит, $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{6} \cdot 5^2 \cdot 120 = 500$, что и требовалось.

7. (4 балла) Докажите, что не существует функции $f(x)$, определённой для всех $x > 1$, такой, что $f(x^2) = 3f(x)$ и $f(x + \frac{1}{x}) = f(x) + 5$.

Доказательство: С одной стороны, $f\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f(x^2) + 5 = 3f(x) + 5$.

С другой стороны, $f\left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = f\left(\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2\right) = 3f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 3(f(x) + 5) = 3f(x) + 15$.

Сравнивая эти равенства, получаем, что для любого числа y, представимого в виде $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ при $x > 1$, то есть для любого $y > 2$, выполняется равенство $f(y + 2) = f(y) + 10$.

Тогда $3f(3) = f(3^2) = f(9) = f(3 + 2 \cdot 3) = f(3) + 30$, откуда $f(3) = 15$. Следовательно, $f(5) = f(3) + 10 = 25$. С другой стороны, $3f(5) = f(25) = f(5 + 2 \cdot 10) = f(5) + 100$, откуда $f(5) = 50 \neq 25$.

Получаем противоречие, значит такой функции действительно не существует.

8. (5 баллов) Родоначальник дворянского рода получил участок земли. Каждый из мужчин в роду умирая делил доставшуюся ему землю поровну между своими сыновьями. Если же сыновей у него не было, земля переходила к государству. Больше никто из членов рода никаким образом не получал или не лишался своей земли. Всего в роду было 200 человек. Какую наименьшую долю исходного участка мог получить кто-либо из членов рода?

Ответ: $\dfrac{1}{4 \cdot 3^{65}}$

Решение: Рассмотрим человека с самой наименьшей долей. Пусть у его отца было a_1 сыновей, у деда — a_2 и так далее до основателя рода, у которого было a_n. Тогда доля этого человека составляет $\dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$, причём нам известно, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ не превосходит 199 (поскольку основатель рода в эту сумму точно не входит).

Таким образом, мы ищем набор чисел с суммой, не превосходящей 199 и максимальным произведением. Докажем, что любой набор, кроме набора, состоящего из 39 троек и одной двойки, не обладает максимальным произведением, так как его можно увеличить,

Во-первых, если сумма чисел в наборе меньше 199, добавим туда ещё одно число, чтобы сделать её равной 199. Произведение от этого не уменьшится.

Во-вторых, пусть в нашем наборе есть число $a \geqslant 4$. Заменим a на пару чисел b и c больших единицы, таких, что $b + c = a$. Докажем, что $bc \geqslant b + c$. Действительно, $bc - b - c = (b-1)(c-1) - 1$, что неотрицательно при b и c больших единицы.

В-третьих, если среди набора есть число 1, то можно заменить любое число a и 1 на $a + 1$, отчего произведение этих чисел увеличится на 1.

Таким образом, любой набор можно преобразовать в набор из двоек и троек, не уменьшая произведения его чисел.

Далее, пусть количество двоек хотя бы три, тогда их произведение равно 8. Если же мы заменим три двойки на две тройки, сумма чисел не изменится, а произведение станет равно 9, то есть опять-таки увеличится. Таким образом можно добится того, чтобы количество двоек стало не больше двух.

Поскольку $199 = 65 \cdot 3 + 2 \cdot 2$, в итоговом наборе будет ровно две двойки.

Итак, любой набор натуральных чисел с суммой, не превосходящей 199, можно преобразовать в набор из 65 троек и двух двоек, и при этом произведение чисел в наборе не уменьшится. Значит, полученный в итоге набор обладает наибольшим произведением, равным $3^{65} \cdot 4$, что даёт нам наименьшую долю наследства обратную к этому числу.