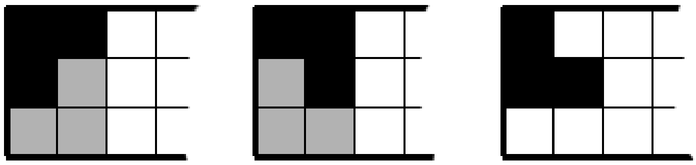
9 класс

1 вариант

1. (2 балла) Сколькими способами можно разбить прямоугольник 3×8 на уголки из трёх клеток?

Ответ: 16

Решение:

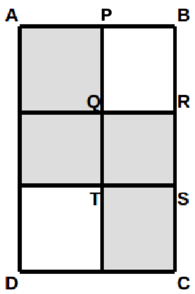


Чёрным цветом на рисунке изображены все три возможных расположения уголка из трёх клеток, содержащего левую верхнюю клетку прямоугольника. В первых двух случаях при этом уголок, содержащий левую нижнюю клетку, расположен единственным возможным образом (на рисунке изображено серым), в третьем случае такой уголок разместить не получается.

Таким образом, в любом из возможных случаев эти два уголка образуют прямоугольник 2×3. Аналогично оставшиеся шесть уголков также образуют три таких же прямоугольника. Каждый из прямоугольников разбивается на уголки двумя способами, $2^4 = 16$.

2. (2 балла) На плоскости по клеточкам нарисовали три прямоугольника (не являющихся квадратами) и один квадрат $QRSC$, так, что в итоге получилась фигура, схематически изображённая на рисунке.

Известно, что площадь прямоугольника $ABCD$ равна 35 клеткам. Найдите, чему равна площадь закрашенной фигуры, если известно, что $AP < QR$.



Ответ: 24 или 26.

Решение:

Заметим, что каждый из изображенных отрезков имеет длину не меньше 1.

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 35$, откуда либо $AB = 5$, $BC = 7$, либо наоборот $AB = 7$, $BC = 5$. (варианты 35×1 и 1×35 не подходят, так как AB хотя бы две клетки, а BC хотя бы три).

Вариант $AB = 7$, $BC = 5$ также невозможен, потому что $BP = QR > AP$, значит, в этом случае $QR = BP > \frac{AB}{2} = \frac{7}{2}$. С другой стороны $QR = RS = BC - BR - SC = 5 - BR - SC \geqslant 3$.

Значит, $AB = 5$ и $BC = 7$. $BP > AP$, следовательно опять получаем 2 случая: либо $BP = 4$, $AP = 1$, либо $BP = 3$, $AP = 2$.

Рассмотрим первый из этих случаев. $BR \neq AP = 1$, иначе левый верхний прямоугольник является квадратом; с другой стороны, $BR + SC = 3$, значит, $BR = 2$, $SC = 1$. Тогда площадь закрашенной фигуры равна $S_{ABCD} - BP \cdot BR - AP \cdot SC = 35 - 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 26$.

Второй случай: $BP = 3$, $AP = 2$. Опять-таки, $BR \neq AP$; с другой стороны, $BR + SC = 4$, значит, длина BR составляет 1 или 3 клетки, а SC соответственно наоборот, 3 или 1. В первом из вариантов нижний правый прямоугольник оказывается квадратом, во втором $S_{ABCD} - BP \cdot BR - AP \cdot SC = 35 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 24$.

3. (3 балла) Из карточек с буквами можно составить слово КАРАКАТИЦА. А сколько из этих карточек можно составить слов (не обязательно осмысленных), в которых буквы Р и Ц соседние?

Ответ: $\dfrac{9!}{4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$

Решение:

Заменим соседние буквы Р и Ц на одну букву, например, на букву Щ, это можно сделать, так как они стоят рядом. Тогда у нас остаётся 9 букв, и из них 4 буквы А и 2 буквы К.

Значит, количество способов переставить буквы в этом слове $\dfrac{9!}{4! \cdot 2!}$. Кроме того, буквы Щ может быть расшифрована двумя способами: как РЦ и как ЦР, что даёт нам увеличение количества способов ещё два раза. Таким образом, получаем $\dfrac{9!}{4!}$.

4. (3 балла) Дан треугольник ABC с углом $C = 120°$. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на сторону AB; точки E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на стороны AC и BC соответственно. Найдите, чему равен периметр треугольника ABC, если известно, что треугольник EFC равнобедренный и его площадь равна $\sqrt{3}$.

Ответ: $16 + 8\sqrt{3}$

Решение:

Треугольник EFC равнобедренный. Так как $\angle C$ в нём тупой, точка C является его вершиной, значит $EC = FC$. Но тогда прямоугольные треугольники ECD и FCD равны по катету и гипотенузе, следовательно, $ED = FD$, то есть точка D лежит на биссектрисе угла C, откуда треугольник ABC также равнобедренный.

Значит, треугольники ABC и EFC подобны. Найдём коэффициент подобия. Во-первых, $CE : CD = \cos\angle ACD = \frac{1}{2}$. Во-вторых, $CD : AC = \cos\angle ACD = \frac{1}{2}$. Значит, $CE : AC = \frac{1}{4}$.

Далее, $\sqrt{3} = S_{EFC} = \dfrac{EC \cdot FC \cdot \sin\angle ACD}{2} = \dfrac{EC^2\sqrt{3}}{4}$, откуда $EC = 2$. Отсюда $EF = 2EC\sin 60° = 2\sqrt{3}$. Значит, $P_{EFC} = 4 + 2\sqrt{3}$, $P_{ABC} = 4P_{EFC} = 16 + 8\sqrt{3}$.

5. (3 балла) Даны сто квадратных трёхчленов, все старшие коэффициенты которых различны. Оказалось, что графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите что графики всех трёхчленов имеют общую точку.

Решение:

Если графики двух квадратных трёхчленов имеют ровно одну общую точку, значит, разность этих трёхчленов имеет ровно один корень, то есть она либо линейная функция, чего не может быть по условию, так как старшие коэффициенты трёхчленов различны, либо полный квадрат.

Рассмотрим 3 квадратных трёхчлена f, g и h. Пусть $f - g = a(x - x_1)^2$, $g - h = b(x - x_2)^2$. Тогда $f - h = a(x - x_1)^2 + b(x - x_2)^2$. Этот трёхчлен тоже должен иметь единственный корень.

Если числа a и b одного знака, то $a(x - x_1)^2 + b(x - x_2)^2 > 0$ во всех точках, за исключением случая, когда $x_1 = x_2$. Если числа a и b одного знака, то $a(x - x_1)^2 + b(x - x_2)^2 > 0$ в точках x_1 и x_2 принимает значения разных знаков, то есть точно имеет 2 корня (если только x_1 и x_2 опять же не равны).

Значит, $x_1 = x_2$ и $f - h = (a + b)(x - x_1)^2$, т.е. $f - h$ имеет корень в той же точке, что и $f - g$ и $g - h$, т.е. графики трёхчленов f, g и h имеют одну общую точку. Подставляя вместо h любой другой трёхчлен из данного набора, получаем, что его график проходит через общую точку графиков f и g, значит, графики всех трёхчленов имеют общую точку.

6. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается выполнять одну из следующих операций:

1) Заменить исходное число на разность числа, полученного из него отбрасыванием трёх последних цифр и числа, составленного из его трёх последних цифр (возможно, записанного в неправильной форме — с нулями в начале; разность берётся положительная — из большего числа вычитается меньшее).

2) Если в исходном числе есть цифра, не равная 9, имеющая две соседние цифры, большие 0, можно увеличить эту цифру на 1, а соседние уменьшить на 1. Если в результате в числе на первом месте оказываются нули, они отбрасывается.

Изначально на доске было записано число из 98 восьмёрок. В конце осталось двузначное число. Какое именно?

Ответ: 88 или 94

Решение:

Пусть с числом $1000a + b$, где $b < 1000$ выполнили первую операцию. Тогда оно превратилось в $a - b$ или в $b - a$. В первом случае сложим эти числа, во втором вычтем — получится $1001a$, что делится на 91. Это значит, что если до выполнения операции остаток от деления нашего числа на 91 был равен x, то после выполнения операции остаток от деления нового числа либо $91 - x$, либо по-прежнему x.

Теперь рассмотрим вторую операцию. При её выполнении к числу прибавляется 10^n а затем из него вычитаются 10^{n+1} и 10^{n-1}. В сумме из числа вычитается $91 \cdot 10^{n-1}$, то есть остаток от деления на 91 сохраняется.

У изначального числа остаток от деления на 91 был равен 88 (так как $888\,888 = 888 \cdot 1001$ делится на 91, а значит, число из 96 восьмёрок и двух нулей на конце делится на 91. Следовательно, итоговое число может давать при делении на 91 остатки 88 или 3, а среди двузначных чисел это только 88 и 94.

Докажем теперь, что оба числа получить можно.

Применяя к числу, состоящему из восьмёрок, первую операцию дважды, мы просто уменьшаем количество восьмёрок на 6. После многократного применения этой операции у нас появится как раз число 88.

Для того, чтобы получить 94, нам надо остановиться на четыре шага раньше, т.е. на числе $88\,888\,888$. Из него получаем $88\,887\,978$, затем $88\,878\,878$, затем $88\,878\,787$, затем $88\,878\,696$, затем $88\,192$ и, наконец, 94.

7. (4 балла) Известно, что x, y, z, t неотрицательные числа, такие что $xyz = 1$, $y + z + t = 2$. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geqslant 3$.

Решение:

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x^2 + 2yz + y^2 - 2yz + z^2 + t^2 = x^2 + \frac{2}{x} + (y - z)^2 + t^2 \geqslant x^2 + \frac{2}{x}$ что хотя бы 3 по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трёх чисел.

8. (5 баллов) Дан треугольник ABC, точка I — центр вписанной окружности, точка A_1 взята таким образом, что точки A является серединой отрезка AI. Докажите, что точка A_1 и центры вневписанных окружностей треугольника ABC лежат на одной окружности.

Решение:

Пусть точка O — центр описанной окружности треугольника ABC; O_1 — такая точка, что O середина O_1I; точки D, E и F — середины дуг AB, BC и AC описанной окружности треугольника ABC, а точки D_1, E_1, F_1 — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон AB, BC и AC соответственно.

Тогда по лемме о трезубце точки D, E и F — середины D_1I, E_1I и F_1I соответственно.

В треугольнике A_1O_1I отрезок AO является средней линией, значит $A_1O_1 = 2AO$. Аналогичные равенства получаем и для остальных пар отрезков. Так как $OA = OD = OE = OF$, следовательно $O_1A_1 = O_1D_1 = O_1E_1 = O_1F_1$, то есть точки A_1, D_1, E_1 и F_1 лежат на одной окружности с центром в O_1, что и требовалось доказать.

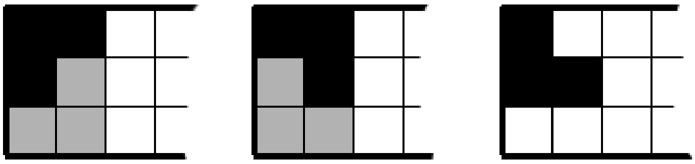
Заметим, что вместо последнего абзаца можно было применить преобразование подобия (гомотетию) с центром в точке I и коэффициентом 2.

9 класс
2 вариант

1. (2 балла) Сколькими способами можно разбить прямоугольник 3×6 на уголки из трёх клеток?

Ответ: 8

Решение:

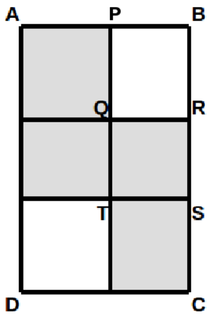


Чёрным цветом на рисунке изображены все три возможных расположения уголка из трёх клеток, содержащего левую верхнюю клетку прямоугольника. В первых двух случаях при этом уголок, содержащий левую нижнюю клетку, расположен единственным возможным образом (на рисунке изображено серым), в третьем случае такой уголок разместить не получается.

Таким образом, в любом из возможных случаев эти два уголка образуют прямоугольник 2×3. Аналогично оставшиеся четыре уголка также образуют два таких же прямоугольника. Каждый из прямоугольников разбивается на уголки двумя способами, $2^3 = 8$.

2. (2 балла) На плоскости по клеточкам нарисовали три прямоугольника (не являющихся квадратами) и один квадрат $QRST$, так, что в итоге получилась фигура, схематически изображённая на рисунке. Стороны всех четырёх прямоугольников меньше 7.

Известно, что площадь прямоугольника $ABCD$ равна 33 клеткам. Найдите, чему равна площадь закрашенной фигуры, если известно, что $PQ < SC$.



Ответ: 17, 20 или 21.

Решение:

Заметим, что каждый из изображенных отрезков имеет длину не меньше 1.

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 33$, откуда либо $AB = 3$, $BC = 11$, либо наоборот $AB = 11$, $BC = 3$. (варианты 33×1 и 1×33 не подходят, так как AB хотя бы две клетки, а BC хотя бы три).

Вариант $AB = 11$, $BC = 3$ также невозможен, потому что получается, что $BR = RS = SC = 1$, откуда $PQ = SC$, что противоречит условию.

Значит, $AB = 3$ и $BC = 11$. Опять получаем 2 случая: либо $BP = 2$, $AP = 1$, либо $BP = 1$, $AP = 2$.

Рассмотрим первый из этих случаев. $BR = PQ \neq AP = 1$, иначе левый верхний прямоугольник является квадратом. $BP = QR = 2$, следовательно, $BR + SC = 9$. Кроме того, $BR = PQ < SC$. Значит, либо $BR = 3$, $SC = 6$, либо $BR = 4$, $SC = 5$.Тогда площадь закрашенной фигуры равна либо $S_{ABCD} - BP \cdot BR - AP \cdot SC = 33 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 21$, либо $S_{ABCD} - BP \cdot BR - AP \cdot SC = 33 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 20$.

Второй случай. $BR = PQ \neq AP = 2$, иначе левый верхний прямоугольник является квадратом. $BP = QR = 1$, следовательно, $BR + SC = 10$. Кроме того, $BR = PQ < SC < 7$. значит, $BR = 4$, $SC = 6$, Тогда площадь закрашенной фигуры равна либо $S_{ABCD} - BP \cdot BR - AP \cdot SC = 33 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 17$.

3. (3 балла) Из карточек с буквами можно составить слово ВОДОПРОВОД. А сколько из этих карточек можно составить слов (не обязательно осмысленных), в которых буквы Р и П соседние?

Ответ: $\dfrac{9!}{4! \cdot 2} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 7560$

Решение:

Заменим соседние буквы П и Р на одну букву, например, на букву Щ, это можно сделать, так как они стоят рядом. Тогда у нас остаётся 9 букв, и из них 4 буквы О, 2 буквы В и 2 буквы Д.

Значит, количество способов переставить буквы в этом слове $\dfrac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 2!}$. Кроме того, буквы Щ может быть расшифрована двумя способами: как ПР и как РП, что даёт нам увеличение количества способов ещё два раза. Таким образом, получаем $\dfrac{9!}{4! \cdot 2}$.

4.(3 балла) Дан треугольник ABC площадью $12\sqrt{3}$ и с углом $C = 120^\circ$ градусов. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на сторону AB; точки E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на стороны AC и BC соответственно. Найдите, чему равен периметр треугольника EFC, если оказалось, что он равнобедренный.

Ответ: $2\sqrt{3}+3$

Решение:

Треугольник EFC равнобедренный. Так как $\angle C$ в нём тупой, точка C является его вершиной, значит $EC = FC$. Но тогда прямоугольные треугольники ECD и FCD равны по катету и гипотенузе, следовательно, $ED = FD$, то есть точка D лежит на биссектрисе угла C, откуда треугольник ABC также равнобедренный.

Значит, треугольники ABC и EFC подобны. Найдём коэффициент подобия. Во-первых, $CE : CD = \cos\angle ACD = \frac{1}{2}$. Во-вторых, $CD : AC = \cos\angle ACD = \frac{1}{2}$. Значит, $CE : AC = \frac{1}{4}$.

Далее, $12\sqrt{3} = S_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BC \cdot \sin\angle ACD}{2} = \dfrac{AC^2\sqrt{3}}{4}$, откуда $AC = 4\sqrt{3}$. Отсюда $AB = 2AC\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$. Значит, $P_{ABC} = 8\sqrt{3}+12\sqrt{3}$, $P_{EFC} = \frac{1}{4}P_{ABC} = 2\sqrt{3}+3$.

5. (3 балла) Даны сто квадратных трёхчленов. Оказалось, что графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку, однако графики никаких трёх из них общей точки не имеют. Докажите что как минимум у пятидесяти из этих трёхчленов совпадают старшие коэффициенты.

Решение:

Если графики двух квадратных трёхчленов имеют ровно одну общую точку, значит, разность этих трёхчленов имеет ровно один корень, то есть она либо линейная функция, либо полный квадрат.

Рассмотрим 3 квадратных трёхчлена f, g и h с различными старшими коэффициентами. Их разности не могут быть линейными функциями. Пусть $f-g = a(x-x_1)^2$, $g-h = b(x-x_2)^2$. Тогда $f-h = a(x-x_1)^2+b(x-x_2)^2$. Этот трёхчлен тоже должен иметь единственный корень.

Если числа a и b одного знака, то $a(x-x_1)^2 + b(x-x_2)^2 > 0$ во всех точках, за исключением случая, когда $x_1 = x_2$. Если числа a и b одного знака, то $a(x-x_1)^2 + b(x-x_2)^2 > 0$ в точках x_1 и x_2 принимает значения разных знаков, то есть точно имеет 2 корня (если только x_1 и x_2 опять же не равны).

Значит, $x_1 = x_2$ и $f-h = (a+b)(x-x_1)^2$, т.е. $f-h$ имеет корень в той же точке, что и $f-g$ и $g-h$, т.е. графики трёхчленов f, g и h имеют одну общую точку. Противоречие.

Значит, таких трёх трёхчленов не существует, то есть возможных значений страшего коэффициентам только два. Следовательно, хотя бы у половины трёхчленов старший коэффициент одинаковый.

6. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается выполнять одну из следующих операций:

1) Заменить исходное число на разность числа, полученного из него отбрасыванием четырёх последних цифр и числа, составленного из его четыррёх последних цифр (возможно, записанного в неправильной форме — с нулями в начале; разность берётся положительная — из большего числа вычитается меньшее).

2) Если в исходном числе три подряд идущих цифры $a > 0$, $b < 7$ и $c > 2$ (именно в таком порядке), разрешается заменить их на цифры $a-1$, $b+3$ и $c-3$ соответственно. Если в результате в числе на первом месте оказываются нули, они отбрасывается.

Изначально на доске было записано число из ста пятёрок. В конце осталось двузначное число. Какое именно?

Ответ: 80 или 66.

Решение:

Пусть с числом $10000a+b$, где $b < 10000$ выполнили первую операцию. Тогда оно превратилось в $a-b$ или в $b-a$. В первом случае сложим эти числа, во втором вычтем — получится $10001a$, что делится на 73. Это значит, что если до выполнения операции остаток от деления нашего числа на 73 был равен x, то после выполнения операции остаток от деления нового числа либо $73-x$, либо по-прежнему x.

Теперь рассмотрим вторую операцию. При её выполнении к числу прибавляется $3 \cdot 10^n$ а также из него вычитаются 10^{n+1} и $3 \cdot 10^{n-1}$. В сумме из числа вычитается $73 \cdot 10^{n-1}$, то есть остаток от деления на 73 сохраняется.

У изначального числа остаток от деления на 73 был равен 7 (так как $55\,555\,555 = 5555 \cdot 10001$ делится на 73, а значит, число из ста пятёрок и четырёх нулей на конце делится на 73 и на остаток влияют только 4 последние цифры. Остаток от деления числа 5555 на 73 составляет 7. Следовательно, итоговое число может давать при делении на 73 остатки 7 или 66, а среди двузначных чисел это только 66 и 80.

Докажем теперь, что оба числа получить можно.

Применяя к числу, состоящему из пятёрок, первую операцию дважды, мы просто уменьшаем количество пятёрок на 8. После многократного применения этой операции у нас появится как раз число из двенадцати пятёрок. Из него ещё двумя операциями можно получить число $554\,825\,554\,825$, далее число $554\,825\,547\,525$. Сделав ещё 2 операции в разных местах, получим $554\,824\,817\,452$, откуда получаем $554\,824\,816\,722$.

Теперь применяем первую операцию и получаем $55\,475\,759$. Из него второй операцией получаем $55\,475\,686$, откуда первой операцией получатся число 139. Из него второй операцией получается 66.

Для того, чтобы получить 80, мы опять-таки получаем число из двенадцати пятёрок. Из него получаем $555\,555\,554\,825$, откуда $555\,555\,554\,752$, затем $555\,555\,547\,452$. Из этого числа мы получаем $555\,555\,546\,722$, откуда двумя операциями в разных местах числа получаем $555\,548\,239\,422$. Применяя первую операцию, получим $55\,545\,401$, а затем 153. Применив к нему ещё раз вторую операцию, получим число 80.

7. (4 балла)

Известно, что x, y, z, t неотрицательные числа, такие что $xyz = 2$, $y + z + t = 2\sqrt{2}$. Докажите, что $2x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 6$.

Решение:

$2x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2x^2 + 2yz + y^2 - 2yz + z^2 + t^2 = 2x^2 + \frac{4}{x} + (y - z)^2 + t^2 \geqslant 2\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = 2\left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)$, а $\left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) \geqslant 3$ по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трёх чисел.

8. (5 баллов) Дан треугольник ABC, точка I — центр вписанной окружности, точки A_1, B_1, C_1 взяты таким образом, что точки A, B, C являются серединами отрезков AI, BI и CI соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AB, лежаь на одной окружности.

Решение:

Пусть точка O — центр описанной окружности треугольника ABC; O_1 — такая точка, что O середина O_1I; точка D — серединыа дуги AB описанной окружности треугольника ABC, а точка D_1 — центры вневписанной окружности треугольника ABC, касающихся сторон AB, BC и AC соответственно.

Тогда по лемме о трезубце точка D — середина D_1I соответственно.

В треугольнике A_1O_1I отрезок AO является средней линией, значит $A_1O_1 = 2AO$. Аналогичные равенства получаем и для остальных пар отрезков. Так как $OA = OB = OC = OD$, следовательно $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1 = O_1D_1$, то есть точки A_1, B_1, C_1, D_1, лежат на одной окружности с центром в O_1, что и требовалось доказать.

Заметим, что вместо последнего абзаца можно было применить преобразование подобия (гомотетию) с центром в точке I и коэффициентом 2.