Задания второго отборочного этапа

11 класс

Задача 1. (2 балла)

1. На доске записано шесть натуральных чисел, таких, что для любых двух a и b из них (где $b>a$), $\log_a b$ – целое число. Какое наименьшее значение может принимать максимальное из этих чисел? Ответ можно записать в виде степени числа: m^n обозначается как m^n.

Ответ: 4294967296 || 2^32 || 4^16 || 16^8 || 256^4

2. На доске записано шесть натуральных чисел, таких, что для любых двух a и b из них, $\log_a b$ или $\log_b a$ – целое число (второй логарифм при этом не обязан существовать). Какое наименьшее значение может принимать максимальное из этих чисел?
Ответ можно записать в виде степени числа: m^n обозначается как m^n.

Ответ: 65536 || 2^16 || 4^8 || 16^4 || 256^2

3. На доске записано пять нечётных чисел, таких, что для любых двух a и b из них (где $b>a$), $\log_a b$ – целое число. Какое наименьшее значение может принимать максимальное из этих чисел?
Ответ можно записать в виде степени числа: m^n обозначается как m^n.

Ответ: 43046721 || 3^16 || 9^8 || 81^4

__**Примеры записи ответов:**__
12345678
7^14

Задача 2. (2 балла)

1. Пусть $f(x)$ – монотонно возрастающая непрерывная функция на промежутке [0; 20,5], такая что $f(0) = 1$. Площадь её подграфика равна 100. Какое наибольшее количество точек, обе координаты которых натуральны, может содержать этот подграфик?

Ответ: 178

2. Пусть $f(x)$ – монотонно возрастающая непрерывная функция на промежутке [0; 10,5], такая что $f(0) = 2$. Площадь её подграфика равна 200. Какое наибольшее количество точек, обе координаты которых натуральны, может содержать этот подграфик?

Ответ: 377

3. Пусть $f(x)$ – монотонно возрастающая непрерывная функция на промежутке [0; 5,5], такая что $f(0) = 3$. Площадь её подграфика равна 50. Какое наибольшее количество точек, обе координаты которых натуральны, может содержать этот подграфик?

Ответ: 81

Задача 3. (2 балла)

1. Последовательность задана следующими условиями: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \cos(\text{arcctg}(x_n))$. Найдите $x_{4\,000\,000}$.

Ответ: 0,0005 || 0.0005 || 1/2000

2. Последовательность задана следующими условиями: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \sin(\text{arctg}(x_n))$. Найдите $x_{99\,999\,999}$.

Ответ: 0,0001 || 0.0001 || 1/10000

3. Последовательность задана следующими условиями: $x_1 = 0{,}5$, $x_{n+1} = \cos(\text{arcctg}(x_n))$. Найдите $x_{999\,997}$.

Ответ: 0,001 || 0.001 || 1/1000

Задача 4. (3 балла)

1. Кубический многочлен имеет три корня, которые образуют геометрическую $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$
прогрессию со вторым членом 7. Пусть a и b – корни производной этого многочлена. Найдите .

Ответ: 2/7

2. Кубический многочлен имеет три корня, которые образуют геометрическую $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$
прогрессию со вторым членом 8. Пусть a и b – корни производной этого многочлена. Найдите .

Ответ: 1/4 || 0,25 || 0.25

3. Кубический многочлен имеет три корня, которые образуют возрастающую $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$
геометрическую прогрессию. Пусть a и b – корни производной этого многочлена. Известно, что . Найдите средний из корней многочлена.

Ответ: 1/2 || 0,5 || 0.5 || 2/4

<u>Примеры записи ответов:</u>
7,4
7/14
714

Задача 5. (3 балла)

1. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная описанная призма. Периметр основания ABC составляет 26 единиц, а произведение сторон – 312 кубических единиц. Площадь поверхности призмы 78 квадратных единиц. Найдите квадрат радиуса её описанной сферы.

Ответ: 37

2. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная описанная призма. Периметр основания ABC составляет 22 единицы, а произведение сторон – 220 кубических единиц. Площадь поверхности призмы 66 квадратных единиц. Найдите квадрат радиуса её описанной сферы.

Ответ: 26

3. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная описанная призма. Периметр основания ABC составляет 32 единицы, а произведение сторон – 896 кубических единицы. Площадь поверхности призмы 192 квадратных единицы. Найдите квадрат радиуса её описанной сферы.

Ответ: 53

Примеры записи ответов:
7,4
7/14
714

Задача 6. (3 балла)

1. В клетках таблицы 6x6 расставлены числа от 0 до 15 (включительно). В какой-то момент каждое число заменили на среднее арифметическое его и всех его соседних по стороне чисел. На какое наибольшее число могла увеличиться сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 16

2. В клетках таблицы 7x7 расставлены числа от 0 до 15 (включительно). В какой-то момент каждое число заменили на среднее арифметическое его и всех его соседних по стороне чисел. На какое наибольшее число могла уменьшиться сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 19

3. В клетках таблицы 5x5 расставлены числа от 0 до 30 (включительно). В какой-то момент каждое число заменили на среднее арифметическое его и всех его соседних по стороне чисел. На какое наибольшее число могла увеличиться сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 26

Задача 7. (3 балла)

1. Какое наибольшее количество векторов длины 4 на плоскости можно взять так, чтобы все их скалярные произведения были целыми?

Ответ: 10

2. Какое наибольшее количество векторов длины 5 на плоскости можно взять так, чтобы все их скалярные произведения были целыми?

Ответ: 12

3. Какое наибольшее количество векторов длины $\sqrt{5}$ на плоскости можно взять так, чтобы все их

скалярные произведения были целыми?

Ответ: 8

Задача 8. (3 балла)

1. При каком значении параметра *a* область определения функции $f(x)=\ln^2(a^2-x)+a+2$ и множество её значений не пересекаются и дают в объединении всю числовую ось? Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -1; 2 || 2; -1 || 2, -1

2. При каком значении параметра *a* область определения функции $f(x)=a^2+a-3-\ln^2(x+a)$ и множество её значений не пересекаются и дают в объединении всю числовую ось? Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 1; -3 || -3; 1 || 1, -3

3. При каком значении параметра *a* область определения функции $f(x)=a^2+4a+2-\ln^2(x-a)$ и множество её значений не пересекаются и дают в объединении всю числовую ось? Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -1; -2 || -2; -1 || -1, -2 || -2; -1

Задача 9. (3 балла)

1. Числа *x*, *y*, *z* удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} xy=(7-\sqrt{50})z \\ xz+yz-(6+\sqrt{50})z=-1 \\ xyz+x+y+z=0 \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\dfrac{(x+1)(y+1)(z+1)}{z}$.

Ответ: 13

2. Числа *x*, *y*, *z* удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} xz=(6-\sqrt{47})y \\ xy+yz-(5+\sqrt{47})y=-1 \\ xyz+x+y+z=0 \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\dfrac{(x+1)(y+1)(z+1)}{y}$.

Ответ: 11

3. Числа *x*, *y*, *z* удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} yz=(8-\sqrt{111})x \\ xz+xy-(7+\sqrt{111})x=-1 \\ xyz+x+y+z=0 \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\dfrac{(x+1)(y+1)(z+1)}{x}$.

Ответ: 15

Задача 10. (4 балла)

1. Окружности O_1 и O_2, имеющие радиусы 2 и 3 касаются друг друга внешним образом, а окружности O_3 радиуса 6 – внутренним образом. Найдите квадрат длины заключённого внутри O_3 участка общей касательной к O_1 и O_2, проведённой в точке их касания.

Ответ: 143,84 || 143.84 || 3596/25

2. Окружности O_1 и O_2, имеющие радиусы 39 и 130 касаются друг друга внешним образом, а окружности O_3 радиуса 195 – внутренним образом. Найдите квадрат длины заключённого внутри O_3 участка общей касательной к O_1 и O_2, проведённой в точке их касания.

Ответ: 151316

3. Окружности O_1 и O_2, имеющие радиусы 4 и 21 касаются друг друга внешним образом, а окружности O_3 радиуса 28 – внутренним образом. Найдите квадрат длины заключённого внутри O_3 участка общей касательной к O_1 и O_2, проведённой в точке их касания.

Ответ: 3119,3536 || 1949596/625

Примеры записи ответов:

7,4

7/14

714