10 класс

Задача 1. (2 балла)

1. Точка O — центр некоторой окружности, A — точка вне окружности, B — точка на окружности такая, что AB — касательная. $AO = 10$. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника AOB.

Ответ: 25.

2. Точка O — центр некоторой окружности, A — точка вне окружности, B — точка на окружности такая, что AB — касательная. $AO = 20$. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника AOB.

Ответ: 100.

3. Точка O — центр некоторой окружности, A — точка вне окружности, B — точка на окружности такая, что AB — касательная. $AO = 6$. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника AOB.

Ответ: 9.

Примеры записи ответов:
17
1/7
1,7

Задача 2. (2 балла)

1. Известно, что для функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ верно соотношение для любого x кроме -1/2:
$g(h(x)) - f(g(x)) = f(h(x))$, где $g(x) = (5x+3)/(2x+1)$ и $h(x) = x^2 + 2x + 3$. Найдите $f(2)$.

Ответ: 1,3

2. Известно, что для функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ верно соотношение для любого x кроме -2:
$g(h(x)) - f(g(x)) = f(h(x))$, где $g(x)=(4x+5)/(x+2)$ и $\mathrm{h}(x) = x^2 + x + 1$. Найдите $f(3)$.

Ответ: 1,7

3. Известно, что для функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ верно соотношение для любого x из области определения::
$g(h(x)) - f(g(x)) = f(h(x))$, где $g(x)=(5x+3)/(x+1)$ и $h(x)=x^2 + x + 2$. Найдите $f(4)$.

Ответ: 2,3

Примеры записи ответов:
17
1/7
1,7

Задача 3. (3 балла)

1. В стране Альфа 96 городов. Известно, что из каждого города выходит хотя бы 2 дороги. Также известно, что если есть дорога из города A в город B и из города B в город C, то тогда есть дорога и из города A в город C. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 195

2. В стране Бета 106 городов. Известно, что из каждого города выходит хотя бы 2 дороги. Также известно, что если есть дорога из города A в город B и из города B в город C, то тогда есть дорога и из города A в город C. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 215

3. В стране Гамма 101 город. Известно, что из каждого города выходит хотя бы 2 дороги. Также

известно, что если есть дорога из города A в город B и из города B в город C, то тогда есть дорога и из города A в город C. Какое минимальное количество дорог может быть в стране?

Ответ: 205

Примеры записи ответов:
17

Задача 4. (3 балла)

1. Решите в простых числах уравнение $p^3 — q^3 = 1946$. В ответе укажите пару (*p*; *q*). Если таких пар несколько, укажите ту, для которой *p*-*q* максимально.

Ответ: 19; 17 | (19; 17)

2. Решите в простых числах уравнение $p^3 — q^3 = 5528$. В ответе укажите пару (*p*; *q*). Если таких пар несколько, укажите ту, для которой *p*-*q* максимально.

Ответ: 19; 11 | (19; 11)

3. Решите в простых числах уравнение $p^3 — q^3 = 2716$. В ответе укажите пару (*p*; *q*). Если таких пар несколько, укажите ту, для которой *p*-*q* максимально.

Ответ: 17; 13 | (17; 13)

Примеры записи ответов:
(37; 11)

Задача 5. (3 балла)

1. Дан прямоугольный параллелепипед со сторонами 6, 6 и *x*. При каких значениях числа *x* прозведение площади поверхности и периметра (суммы длин всех рёбер) этого параллелепипеда не превосходят 224/3 его объёма?
Ответ записать в виде промежутка.

Ответ: [4; 9] || [4, 9]

2. Дан прямоугольный параллелепипед со сторонами 4, 6 и *x*. При каких значениях числа *x* прозведение площади поверхности и периметра (суммы длин всех рёбер) этого параллелепипеда не превосходят 78 его объёмов?
Ответ записать в виде промежутка.

Ответ: [3; 8] || [3, 8]

3. Дан прямоугольный параллелепипед со сторонами 2, 6 и *x*. При каких значениях числа *x* прозведение площади поверхности и периметра (суммы длин всех рёбер) этого параллелепипеда не превосходят 88 его объёмов?
Ответ записать в виде промежутка.

Ответ: [3; 4] || [3, 4]

Примеры записи ответов:
[1; 5]

Задача 6. (3 балла)

1. Окружность радиуса 12 с центром в точке *O* и окружность радиуса 3 касаются внутренним образом в точке *H*. Прямая *XH* — их обшая касательная, прямая *OX* — касательная к маленькой окружности. Найдите квадрат длины отрезка *OX*.

Ответ: 162

2.. Окружность радиуса 12 с центром в точке *O* и окружность радиуса 4 касаются внутренним образом в точке *H*. Прямая *XH* — их обшая касательная, прямая *OX* — касательная к маленькой окружности. Найдите квадрат длины отрезка *OX*.

Ответ: 192

3. Окружность радиуса 20 с центром в точке *O* и окружность радиуса 8 касаются внутренним образом в точке *H*. Прямая *XH* — их обшая касательная, прямая *OX* — касательная к маленькой окружности. Найдите квадрат длины отрезка *OX*.

Ответ: 720

Примеры записи ответов:
17
1/7
1,7

Задача 7. (3 балла)

1 . Известно, что число $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ является корнем многочлена четвертой степени с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. А чему равна сумма коэффициентов у этого многочлена?

Ответ: -11

2 . Известно, что число $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ является корнем многочлена четвертой степени с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. А чему равна сумма коэффициентов у этого многочлена?

Ответ: -3

3 . Известно, что число $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ является корнем многочлена четвертой степени с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. А чему равна сумма коэффициентов у этого многочлена?

Ответ: -19

<u>Примеры записи ответов:</u>
17
1/7
1,7

Задача 8

1. Даны две геометрические прогрессии a_n и b_n. Известно, что $a_0 = 2$ и сумма знаменателей этих двух прогрессий равна 5. Найдите, чему может быть равно b_0, если известно, что a_0, b_0, a_1, b_1 — последовательные члены некоторой арифметической прогрессии (именно в таком порядке).

Ответ: -1; 4 || 4; -1 || 4, -1

2. Даны две геометрические прогрессии a_n и b_n. Известно, что $a_0 = 3$ и сумма знаменателей этих двух прогрессий равна 2. Найдите, чему может быть равно b_0, если известно, что a_0, b_0, a_1, b_1 — последовательные члены некоторой арифметической прогрессии (именно в таком порядке). Если правильных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -3; 3 || 3; -3 || 3, -3

3. Даны две геометрические прогрессии a_n и b_n. Известно, что $a_0 = 4$ и сумма знаменателей этих двух прогрессий равна 5. Найдите, чему может быть равно b_0, если известно, что a_0, b_0, a_1, b_1 — последовательные члены некоторой арифметической прогрессии (именно в таком порядке)

Ответ: -2; 8 || 8; -2

<u>Примеры записи ответов:</u>
17
1/7
1,7
1; 7
1,7; 17

Задача 9. (4 балла)

1 . Известно, что функция $f(x)$ удовлетворяет равенству при любом x:
$\sin x + f(x) = f(x+2)$

Найдите значени $f(2013) \sin 1$, если известно, что $f(1) = \dfrac{\cos^2 1006}{\sin 1}$.

Ответ: 1

2 . Известно, что функция $f(x)$ удовлетворяет равенству при любом x:
$2 \sin x + f(x) = f(x+2)$

Найдите, значение $f(2015) \sin 1$, если известно, что $f(1) = \dfrac{2\cos^2 1007}{\sin 1}$.
Ответ: 2

3 . Известно, что функция $f(x)$ удовлетворяет равенству при любом x:

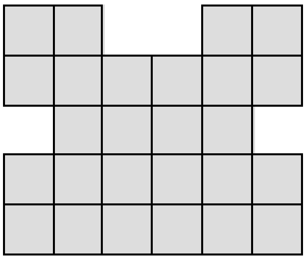
$3 \sin x + f(x) = f(x+2)$

Найдите, значение f(2017) sin 1, если известно, что $f(1) = \dfrac{3\cos^2 1008}{\sin 1}$.
Ответ: 3

Примеры записи ответов:
17
1/7
1,7

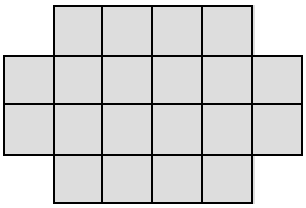
Задача 10. (4 балла)

1. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1x2?



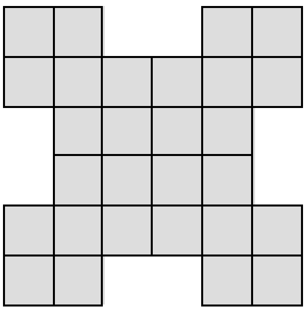
Ответ: 88

2. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1x2?



Ответ: 50

3. Сколько существует способов разбить данную фигуру на прямоугольники 1x2?



Ответ: 128

Примеры записи ответов:
17