9 класс
1 вариант

1. (2 балла) В бесконечном турнире по волейболу участвуют 65 команд. Каждый утро организатор составляет расписание матчей на сегодня. Каждый день 64 команды разбиваются на пары и играют по одному матчу, одна команда отдыхает. Каждый матч заканчивается победой одной из команд, ничьих не бывает.

Докажите, что организатор может так составлять расписания, что рано или поздно обязательно появится команда, выигравшая семь матчей подряд.

2. (2 балла) Решите ребус $TOK = KOT + KTO$. (Разные буквы обозначают разные цифры, числа не могут начинаться с нуля).

3. (2 балла) Шахматная фигура *четырёхлинейка* бьёт две вертикали и две горизонтали, соседние с клеткой, на которой она стоит. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга четырёхлинеек можно поставить на доске 10×10?

4. (3 балла) Вася нашёл треугольник со сторонами a, b, c и составил квадратный трёхчлен $ax^2 - bx + c$. У этого трёхчлена нашлись два корня. Докажите, что они одновременно не могут быть меньше, чем $\frac{1}{3}$.

5. (3 балла) В ряд по вертикали по возрастанию выписаны числа от 1 до 101. Между ними вставляют дробные черточки разных размеров. При этом вычисление начинается с самой маленькой дробной черты и заканчивается самой большой, например, $\dfrac{1}{\frac{\frac{4}{5}}{3}} = \dfrac{15}{4}$.

Какое наибольшее значение может иметь полученная дробь?

6. (3 балла) Точки X, Y, Z лежат на одной прямой, причем именно в таком порядке. ω_1, ω_2, ω_3 — окружности с диаметрами XZ, XY, YZ соответственно. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точке A, потом окружность ω_2 в точке B, потом она проходит через Y, дальше она пересекает окружность ω_3 в точке C, и наконец, снова пересекает окружность ω_1 в точке D. Докажите, что $AB = CD$.

7. (4 балла) Докажите, что если выпуклый 102-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы из каждой вершины выходило либо ровно три диагонали, либо ни одной, то количество получившихся треугольников, у которых все три стороны являются диагоналями исходного многоугольника, составит ровно 34.

8. (4 балла) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. На стороне AB отмечена точка K, на стороне BC – точка L, на стороне AC – точка N. Известно, что $BK = \frac{14}{13}$, $AN = 10$, $BL = 1$. Через точку N провели прямую, параллельную KL, она пересекла сторону BC в точке M. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$.

9 класс
2 вариант

1. (2 балла) В бесконечном турнире по волейболу участвуют 33 команды. Каждый утро организатор составляет расписание матчей на сегодня. Каждый день 32 команды разбиваются на пары и играют по одному матчу, одна команда отдыхает. Каждый матч заканчивается победой одной из команд, ничьих не бывает.

Докажите, что организатор может так составлять расписания, что рано или поздно обязательно появится команда, проигравшая шесть матчей подряд.

2. (2 балла) Решите ребус $OTC + OCT = CTO$. (Разные буквы обозначают разные цифры, числа не могут начинаться с нуля).

3. (2 балла) Шахматная фигура *четырёхлинейка* бьёт две вертикали и две горизонтали, соседние с клеткой, на которой она стоит. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга четырёхлинеек можно поставить на доске 10×10?

4. (3 балла) Вася нашёл треугольник со сторонами a, b, c и составил квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$. У этого трёхчлена нашлись два корня. Докажите, что они одновременно не могут быть больше, чем $-\frac{1}{3}$.

5. (3 балла) В ряд по вертикали по возрастанию выписаны числа от 1 до 100. Между ними вставляют дробные черточки разных размеров. При этом вычисление начинается с самой маленькой дробной черты и заканчивается самой большой, например, $\dfrac{1}{\frac{\frac{4}{5}}{3}} = \dfrac{15}{4}$.

Какое наибольшее значение может иметь полученная дробь?

6. (3 балла) Точки X, Y, Z лежат на одной прямой, причем именно в таком порядке. ω_1, ω_2, ω_3 — окружности с диаметрами XZ, XY, YZ соответственно. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точке A, потом окружность ω_3 в точках B и C (в таком порядке), дальше окружность ω_2 в точке D, и наконец, проходит через точку X. Докажите, что $AB = CD$.

7. (4 балла) Докажите, что если выпуклый 108-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы из каждой вершины выходило либо ровно три диагонали, либо ни одной, то количество получившихся треугольников, у которых все три стороны являются диагоналями исходного многоугольника, составит ровно 36.

8. (4 балла) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 14$, $BC = 13$, $AC = 15$. На стороне AB отмечена точка K, на стороне AC – точка L, на стороне BC – точка N. Известно, что $AK = \frac{15}{14}$, $BN = 9$, $AL = 1$. Через точку N провели прямую, параллельную KL, она пересекла сторону AC в точке M. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$.