11 класс
1 вариант

1. (2 балла) Решите систему:

$$\begin{cases} \left|\frac{\ln x}{\ln 2}\right| + \frac{4x^2}{15} - \frac{16}{15} = 0 \\ \frac{\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\ln 7} + 12x - 5 = 0 \end{cases}$$

2. (2 балла) В пространстве дано сто единичных векторов, сумма которых равна нулевому вектору. Можно ли выбрать из них несколько таких, что их сумма имеет длину хотя бы 60?

3. (2 балла) Известно, что $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} b$ натуральные, $\operatorname{tg}(a+b)$ целое. Найдите $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} b$.

4. (3 балла) Программа “Весёлый многочлен” может производить с многочленом $P(x)$ следующие операции:

1) превращать $P(x)$ в $xP'(x)$, где $P'(x)$ – производная многочлена $P(x)$;
2) делить коэффициент при x^k на k для любого натурального k;
3) прибавлять к имеющемуся многочлену любую константу;
4) убирать из многочлена одночлен старшей степени.

Может ли она за несколько таких операций получить из многочлена $x^{17} + 2x^{15} + 4x^9 + x^6 + 4x^3 + 2x + 1$ многочлен $3x + 1$?

5. (4 балла) В правильной треугольной пирамиде (не являющейся правильным тетраэдром) площадь основанияв четыре раза меньше площади боковой грани. Высота пирамиды имеет длину 130 см.

Построим следующую (бесконечную) последовательность сфер. Пусть S_1 – вписанная сфера этой пирамиды. Тогда S_2 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_1; S_3 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_2, не равная S_1 и т.д.; S_{n+1} – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_n, не равная S_{n-1}.

Найдите суммарный объём всех этих сфер.

6. (4 балла) $ABCDE$ – вписанный пятиугольник. Окружность ω касается его описанной окружности в точке E. Прямая BC пересекает окружность ω в точках K и L, причём K лежит на луче ED, а L на луче EA. P и Q — точки пересечения описанных окружностей треугольников LCD и ACK с ω соответственно (не совпадающие с L и K). Докажите, что прямые AQ и PD пересекаются на прямой EC.

7. (5 баллов) Положительные числа a, b, c связаны соотношением $1 + a + b + c = 2abc$. Докажите неравенство

$$\frac{ab}{1+a+b} + \frac{bc}{1+b+c} + \frac{ca}{1+c+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

8. (5 баллов) В клетках таблицы $(2k+1)\times(2n+1)$, где $k \leqslant n$, расставлены числа 1, 2 и 3, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

11 класс
2 вариант

1. (2 балла) Решите систему:

$$\begin{cases} \left|\frac{\ln x}{\ln 3}\right| + \frac{9x^2}{80} - 81/80 = 0 \\ \frac{\ln\left(x+\frac{4}{5}\right)}{\ln 7} + 4x - 1 = 0 \end{cases}$$

2. (2 балла) В пространстве дано двести единичных векторов, сумма которых равна нулевому вектору. Можно ли выбрать из них несколько таких, что их сумма имеет длину хотя бы 111?

3. (2 балла) Известно, что $\operatorname{tg} a$ и $-\operatorname{tg} b$ натуральные, $\operatorname{tg}(a-b)$ целое. Найдите $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} b$.

4. (3 балла) Программа “Весёлый многочлен” может производить с многочленом $P(x)$ следующие операции:
1) превращать $P(x)$ в $xP'(x)$, где $P'(x)$ – производная многочлена $P(x)$;
2) делить коэффициент при x^k на k для любого натурального k;
3) прибавлять к имеющемуся многочлену любую константу;
4) убирать из многочлена одночлен старшей степени.
Может ли она за несколько таких операций получить из многочлена $2x^{18}+2x^{14}+3x^{10}+x^6+4x^5+3x^2+4x+2$ многочлен $2x+1$?

5. (3 балла) В правильной треугольной пирамиде (не являющейся правильным тетраэдром) площадь основанияв три раза меньше площади боковой грани. Высота пирамиды имеет длину 10 см.

Построим следующую (бесконечную) последовательность сфер. Пусть S_1 – вписанная сфера этой пирамиды. Тогда S_2 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_1; S_3 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_2, не равная S_1 и т.д.; S_{n+1} – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_n, не равная S_{n-1}.

Найдите суммарный объём всех этих сфер.

6. (4 балла) Пусть ω — описанная окружность треугольника ABC. Точки D, E и F на сторонах BC, CA и AB таковы, что описанная окружность треугольника DEF касается окружности ω в вершине B. P и Q — точки пересечения описанных окружностей треугольника CEF и ADE с ω соответственно (не совпадающие с C и A). Докажите, что прямые PF и DQ пересекаются на прямой BE.

7. (5 баллов) Положительные числа a, b, c связаны соотношением $1+2a+2b+2c=16abc$. Докажите неравенство

$$\frac{8ab}{1+2a+2b}+\frac{8bc}{1+2b+2c}+\frac{8ca}{1+2c+2a} \geqslant 3.$$

8. (5 баллов) В клетках таблицы $(2k-1)\times(2n-1)$, где $k \geqslant n$, расставлены числа 0, 1 и 2, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

11 класс
3 вариант

1. (2 балла) Решите систему:

$$\begin{cases} \left|\frac{\ln x}{\ln 3}\right| + \frac{9x^2}{35} - 36/35 = 0 \\ \frac{\ln\left(x+\frac{5}{6}\right)}{\ln 5} + 5x - 1 = 0 \end{cases}$$

2. (2 балла) В пространстве дано пятьдесят векторов длины 2, сумма которых равна нулевому вектору. Можно ли выбрать из них несколько таких, что их сумма имеет длину хотя бы 55?

3. (2 балла) Известно, что $\operatorname{ctg} a$ и $\operatorname{ctg} b$ натуральные, $\operatorname{tg}(a+b)$ целое. Найдите $\operatorname{ctg} a$ и $\operatorname{ctg} b$.

4. (3 балла) Программа "Весёлый многочлен" может производить с многочленом $P(x)$ следующие операции:

1) превращать $P(x)$ в $xP'(x)$, где $P'(x)$ – производная многочлена $P(x)$;
2) делить коэффициент при x^k на k для любого натурального k;
3) прибавлять к имеющемуся многочлену любую константу;
4) убирать из многочлена одночлен старшей степени.

Может ли она за несколько таких операций получить из многочлена $4x^{16}+2x^{13}+4x^8+5x^5+x^4+3x^3+2x+3$ многочлен $5x+2$?

5. (3 балла) В правильной треугольной пирамиде (не являющейся правильным тетраэдром) площадь основанияв два раза больше площади боковой грани. Высота пирамиды имеет длину 50 см.

Построим следующую (бесконечную) последовательность сфер. Пусть S_1 – вписанная сфера этой пирамиды. Тогда S_2 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_1; S_3 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_2, не равная S_1 и т.д.; S_{n+1} – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_n, не равная S_{n-1}.

Найдите суммарный объём всех этих сфер.

.

6. (4 балла) $ABCDE$ – вписанный пятиугольник. Окружность ω касается его описанной окружности в точке A. Прямая CD пересекает окружность ω в точках K и L, причём K лежит на луче AB, а L на луче AE. M и N — точки пересечения описанных окружностей треугольников KCE и BCL с ω соответственно (не совпадающие с K и L). Докажите, что прямые ME и NB пересекаются на прямой AC.

7. (5 баллов) Положительные числа x, y, z связаны соотношением $1+x+y+z=2xyz$. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{1+x+y}+\frac{xz}{1+x+z}+\frac{yz}{1+z+y}\geqslant\frac{3}{2}.$$

8. (5 баллов) В клетках таблицы $(2m+1)\times(2n+1)$ где $m\leqslant n$, расставлены числа 0, 1 и 2, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

11 класс
4 вариант

1. (2 балла) Решите систему:

$$\begin{cases} \left|\frac{\ln x}{\ln 2}\right| + \frac{4x^2}{35} - 36/35 = 0 \\ \frac{\ln\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\ln 5} + 3x - 1 = 0 \end{cases}$$

2. (2 балла) В пространстве дано сто векторов длины 2, сумма которых равна нулевому вектору. Можно ли выбрать из них несколько таких, что их сумма имеет длину хотя бы 105?

3. (2 балла) Известно, что $\operatorname{ctg} a$ и $-\operatorname{ctg} b$ натуральные, $\operatorname{tg}(a-b)$ целое. Найдите $\operatorname{ctg} a$ и $\operatorname{ctg} b$.

4. (3 балла) Программа “Весёлый многочлен” может производить с многочленом $P(x)$ следующие операции:

1) превращать $P(x)$ в $xP'(x)$, где $P'(x)$ – производная многочлена $P(x)$;
2) делить коэффициент при x^k на k для любого натурального k;
3) прибавлять к имеющемуся многочлену любую константу;
4) убирать из многочлена одночлен старшей степени.

Может ли она за несколько таких операций получить из многочлена $3x^{19}+3x^{16}+x^{12}-11x^{10}+2x^8-4x^3+2x+1$ многочлен $5x-1$?

5. (3 балла) В правильной треугольной пирамиде (не являющейся правильным тетраэдром) площадь основания в два раза меньше площади боковой грани. Высота пирамиды имеет длину 70 см.

Построим следующую (бесконечную) последовательность сфер. Пусть S_1 – вписанная сфера этой пирамиды. Тогда S_2 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_1; S_3 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_2, не равная S_1 и т.д.; S_{n+1} – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_n, не равная S_{n-1}.

Найдите суммарный объём всех этих сфер.

6. (4 балла) Пусть ω — описанная окружность треугольника ABC. Точки D, E и F на сторонах BC, CA и AB таковы, что описанная окружность треугольника DEF касается окружности ω в вершине A. G и H — точки пересечения описанных окружностей треугольников BDE и CDF с ω соответственно (не совпадающие с B и C). Докажите, что прямые GE и HF пересекаются на прямой AD.

7. (5 баллов) Положительные числа x, y, z связаны соотношением $1+2x+2y+2z=16xyz$. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{1+2x+2y}+\frac{xz}{1+2x+2z}+\frac{yz}{1+2z+2y} \geqslant \frac{3}{8}.$$

8. (5 баллов) В клетках таблицы $(2m-1)\times(2n-1)$, где $m \geqslant n$, расставлены числа 1, 2 и 3, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?