10 класс

1 вариант

1. (2 балла) Докажите неравенство для всех $x \geqslant 1$:

$$x^5 - \frac{1}{x^4} \geqslant 9(x-1)$$

.

2. (2 балла) Последовательность x_n задана следующими условиями: $x_1 = 3$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{4}{3}x_n = 4$. Найдите x_{2015}.

3. (3 балла) Докажите, что не существует такой дробно-линейной функции, которая в сумме со своей обратной функцией даёт -2 в каждой точке, где обе эти функции определены.

На всякий случай: постоянную функцию мы не считаем дробно-линейной.

4. (3 балла) Известно, что $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} 3a$ целые. Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} a$.

5. (3 балла) Числа a, b и c – различные корни кубического многочлена $x^3 + ax^2 + bx - c$. Найдите их.

6. (3 балла) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 21$. На стороне AB отмечена точка K, на стороне AC – точка L, на стороне BC – точка N. Известно, что $AK = 4$, $CN = 1$, $CL = \frac{20}{21}$. Через точку K провели прямую, параллельную NL, она пересекла сторону AC в точке M. Найдите площадь четырёхугольника $NLMK$.

7. (3 балла) Петя и Вася играют в игру. У каждого есть по одному ходу: Петя рисует на плоскости два квадрата 3×3, а Вася меняет положение одного из квадратов при помощи параллельного переноса. Вася выигрывает, если после его хода площадь пересечения квадратов составляет хотя бы 7. Кто выигрывает при правильной игре?

8. (5 баллов) На площади собралось огромное количество юношей и девушек, некоторые из которых знакомы друг с другом. Всегда ли возможно раздать им галстуки 99 цветов (каждый человек получает один галстук) таким образом, что если какой-то юноша знаком хотя бы с 2015 девушками, то среди этих девушек есть две в галстуках разного цвета и наоборот, если какая-то девушка знакома хотя бы с 2015 юношами, среди них есть юноши в галстуках разных цветов?

10 класс
2 вариант

1. (2 балла) Докажите неравенство для всех $x \geqslant 1$:

$$x^4 - \frac{1}{x^3} \geqslant 7(x-1)$$

2. (2 балла) Последовательность x_n задана следующими условиями: $x_1 = 2$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{3}{2}x_n = 3$. Найдите x_{1000}.

3. (3 балла) Докажите, что не существует такой дробно-линейной функции, которая в сумме со своей обратной функцией даёт 2 в каждой точке, где обе эти функции определены.

4. (3 балла) Известно, что $\operatorname{ctg} a$ и $\operatorname{ctg} 3a$ целые. Найдите все возможные значения $\operatorname{ctg} a$.

5. (3 балла) Числа a, b и c – различные корни кубического многочлена $x^3 + ax^2 - bx - c$. Найдите их.

6. (3 балла) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 21$, $BC = 20$, $AC = 13$. На стороне BC отмечена точка N, на стороне AB – точка L, на стороне AC – точка K. Известно, что $AK = 1$, $CN = 12$, $AL = \frac{13}{21}$. Через точку N провели прямую, параллельную KL, она пересекла сторону AB в точке M. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$.

7. (3 балла) Петя и Вася играют в игру. У каждого есть по одному ходу: Петя рисует на плоскости два квадрата 4×4, а Вася меняет положение одного из квадратов при помощи параллельного переноса. Вася выигрывает, если после его хода площадь пересечения квадратов составляет хотя бы 12. Кто выигрывает при правильной игре?

8. (5 баллов) На олимпиаде собралось огромное количество мальчиков и девочек, некоторые из которых знакомы друг с другом. Всегда ли возможно раздать им шляпы 100 цветов (каждый человек получает одну шляпу) таким образом, что если какой-то мальчик знаком хотя бы с 2014 девочками, то среди этих девочек есть две в шляпах разного цвета и наоборот, если какая-то девочка знакома хотя бы с 2014 мальчиками, среди них есть мальчики в шляпах разных цветов?