

Задача 1. (1 балл)

Дан клетчатый куб $8 \times 8 \times 8$. Поясом назовём множество из 32 клеток его поверхности, центры которых лежат в одной плоскости, параллельной одной из граней куба. Эти клетки образуют четыре линии по восемь клеток, продолжающимися друг друга за рёбра куба.

В клетках поверхности куба расставили целые неотрицательные числа так, чтобы в каждом поясе сумма чисел была равна 100. Какова может быть максимальная сумма чисел на всей поверхности куба?

Задача 2. (2 балла)

$\{A_k\}$ – множество точек на плоскости такое, что $A_1A_kA_{k+1}$ – прямоугольный треугольник с прямым углом A_k . Известно, что $A_{k-1}A_k = \sqrt{k+48}$. Найдите A_1A_{100} .

Задача 3. (2 балла)

Известно, что $\cos x - \cos y = 1$ и $\cos 2x - \cos 2y = 1$.

Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Задача 4. (2 балла)

Решите неравенство $x < \min(f(x), g(x), h(x))$, где

$$f(x) = -x^2 + 2,5x + 2,5 \text{ при } x \text{ не больших } 1, f(x) = 18 \text{ при } x > 1.$$

$$g(x) = x^2 - 5x + 8$$

$$h(x) = -2x + 18.$$

В ответе укажите промежуток, на котором выполняется неравенство. В случае, если промежутков несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой

Задача 5. (3 балла)

В окружность радиуса 4 вписан правильный 18-угольник. Из центра окружности ко всем вершинам этого 18-угольника проведены векторы. Найдите сумму всех попарных скалярных произведений различных векторов.

Задача 6. (3 балла)

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – взаимно обратные функции, определённые на всей числовой прямой, кроме 0 и

1. Известно, что $f(x)g(x) - f(x) + 1 = 0$. Найдите $\underbrace{f(f(\dots(3)\dots))}_{100 \text{ раз}}$. Если в ответе получится дробь, запишите её в виде неправильной дроби, не округляйте.

Задача 7. (3 балла)

$ABCD$ – вписанный четырёхугольник. X – точка пересечения лучей AB и DC , Y – прямых BC и AD . $AB = 12$, $AD = 12$, $CD = 6$, $DY = 8$. Найдите CX .

Задача 8. (3 балла)

Решите уравнение $p^2 - 2p = q^2 + 46q$ в простых числах. В ответе укажите число p . Если возможных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через запятую или точку с запятой.

Задача 8. (4 балла)

Даны 700 подряд идущих членов арифметической прогрессии (с ненулевой разностью). Какое наибольшее количество из них могут образовывать возрастающую геометрическую прогрессию со знаменателем, не равным 2?

Задача 10. (4 балла)

Дан треугольник ABC с углом $A = 25^\circ$, углом $C = 70^\circ$. Окружность O радиуса $10\sqrt{3}$ касается стороны AB в её середине с внешней стороны треугольника, а также его описанной окружности. Найдите расстояние между точками, в которых биссектриса угла C пересекает окружность O .