9 класс
1 вариант

1. (2 балла) В бесконечном турнире по волейболу участвуют 65 команд. Каждый утро организатор составляет расписание матчей на сегодня. Каждый день 64 команды разбиваются на пары и играют по одному матчу, одна команда отдыхает. Каждый матч заканчивается победой одной из команд, ничьих не бывает.

Докажите, что организатор может так составлять расписания, что рано или поздно обязательно появится команда, выигравшая семь матчей подряд.

Решение:

Первые шесть дней организатор проводит среди 64 команд турнир по олимпийской системе (навылет), лишние матчи играются произвольно. Победитель этого турнира выиграет шесть матчей подряд.

Следующие шесть дней победитель первого олимпийского турнира отдыхает, среди остальных 64 команд разыгрывается второй турнир по олимпийской ситсеме.

На тринадцатый день победители двух турниров, уже имеющие по шесть побед, играют между собой. Победитель этого матча выигрывает свой седьмой матч подряд.

2. (2 балла) Решите ребус $TOK = KOT + KTO$. (Разные буквы обозначают разные цифры, числа не могут начинаться с нуля).

Ответ: $954 = 459 + 495$.

Решение: Запишем числа из нашего ребуса в виде суммы разрядных слагаемых:

$$100T + 10O + K = 100K + 10T + O + 100K + 10O + T,$$

откуда $89T = 199K + O$. Левая часть равенства не превосходит 801, значит имеет смысл перебрать K от 1 до 4. При $K = 4$ получает $T = 9$ и $O = 5$.

3. (2 балла) Шахматная фигура *четырёхлинейка* бьёт две вертикали и две горизонтали, соседние с клеткой, на которой она стоит. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга четырёхлинеек можно поставить на доске 10×10?

Ответ: 25

Решение:

Пример: расставим четырёхлинейки на пересечениях чётных столбцов и чётных строк.

Оценка: В каждой паре строк четырёхлинейки могут стоять только на одной строке. При этом на двух соседних клетках они стоять не могут.

4. (3 балла) Вася нашёл треугольник со сторонами a, b, c и составил квадратный трёхчлен $ax^2 - bx + c$. У этого трёхчлена нашлись два корня. Докажите, что они одновременно не могут быть меньше, чем $\frac{1}{3}$.

Решение:

При неположительных x трёхчлен принимает положительные значения, значит они не могут быть корнями. Пусть x_1, x_2 – положительные корни нашего трёхчлена и оба они меньше, чем $\frac{1}{3}$. Тогда
$b + c = a\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) = a(x_1 + x_2 + x_1x_2) \leqslant \frac{7}{9}a < a$, что противоречит неравенству треугольника.

(Заметим, что в неравенстве $a(x_1 + x_2 + x_1x_2) \leqslant \frac{7}{3}a$ мы существенно пользовались положительностью x_1 и x_2).

5. (3 балла) В ряд по вертикали по возрастанию выписаны числа от 1 до 101. Между ними вставляют дробные черточки разных размеров. При этом вычисление начинается с самой маленькой дробной черты и заканчивается самой большой, например, $\dfrac{1}{\frac{\frac{4}{5}}{3}} = \dfrac{15}{4}$.

Какое наибольшее значение может иметь полученная дробь?

Ответ: $\frac{101!}{4}$.

Решение:

Оценка: после раскрытия "многоэтажной" дроби и до сокращения, часть чисел от 1 до 101 окажутся в числителе, часть в знаменателе. При этом 1 точно окажется в числителе, а в знаменателе окажется хотя бы одно число. Значит, знаменатель не меньше 2, следовательно, числитель не больше $\frac{101!}{2}$, откуда получаем требуемую оценку.

Пример: Разместим самую большую дробную черту между 1 и 2, остальные разместим по возрастанию: самую маленькую между 2 и 3, следующую между 3 и 4 и т.д., вторую по величине между 100 и 101.

6. (3 балла) Точки X, Y, Z лежат на одной прямой, причем именно в таком порядке. ω_1, ω_2, ω_3 — окружности с диаметрами XZ, XY, YZ соответственно. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точке A, потом окружность ω_2 в точке B, потом она проходит через Y, дальше она пересекает окружность ω_3 в точке C, и наконец, снова пересекает окружность ω_1 в точке D. Докажите, что $AB = CD$.

Решение:

Углы $\angle XBD$ и $\angle XAZ$ опираются на диаметры окружностей ω_2 и ω_1 соответственно, следовательно они прямые. $\angle BDX = \angle ADX = \angle AZX$. Следовательно, треугольники XAZ и XBD подобны.

Значит, $BD = \frac{AZ \cdot XD}{XZ}$. Аналогично из подобия треугольников ACZ и ZDX получаем $AC = \frac{AZ \cdot XD}{XZ}$, т.е. $BD = AC$, откуда очевидно следует требуемое равенство.

7. (4 балла) Докажите, что если выпуклый 102-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы из каждой вершины выходило либо ровно три диагонали, либо ни одной, то количество получившихся треугольников, у которых все три стороны являются диагоналями исходного многоугольника, составит ровно 34.

Решение:

102-угольник разбивается на 100 треугольников 99 диагоналями. Каждая диагональ имеет два конца, следовательно, сумма количеств диагоналей, выходящих из вершин многоугольника, равна 198. Значит, вершин из которых выходит по три дигонали, ровно 66, а количество оставшихся вершин, из которых ни выходит ни одной диагонали, составляет 36.

Треугольники бывают трёх типов. Первый тип – треугольники, у которых две стороны являются сторонами многоугольника. Между этими двумя сторонами находится вершина, из которой не выходит ни одной диагонали, и наоборот, каждой такой вершине соотвествует один треугольник первого типа. Следовательно, таких треугольников также 36.

Треугольники первого типа содержат 72 стороны многоугольника. Оставшиеся 30 сторон входят в треугольники второго типа, содержащие по одной стороне многоугольника каждый. Значит, треугольников второго типа также 30.

Остаются треугольники третьего типа, количество которых равно $100 - 36 - 30 = 34$, что и требовалось.

8. (4 балла) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. На стороне AB отмечена точка K, на стороне BC – точка L, на стороне AC – точка N. Известно, что $BK = \frac{14}{13}$, $AN = 10$, $BL = 1$. Через точку N провели прямую, параллельную KL, она пересекла сторону BC в точке M. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$.

Ответ: $\frac{36503}{1183} = 30\frac{1013}{1183}$.

Решение:

Площадь треугольника ABC по формуле Герона составляет 84.

$$S_{KBL} = \frac{KB \cdot BL}{AB \cdot BC} \cdot S_{ABC} = \frac{\frac{14}{13} \cdot 1}{13 \cdot 14} \cdot 84 = \frac{84}{169}.$$

$$S_{AKN} = \frac{AK \cdot AN}{AB \cdot AC} \cdot S_{ABC} = \frac{\left(13 - \frac{14}{13}\right) \cdot 10}{13 \cdot 15} \cdot 84 = \frac{8680}{169}.$$

Проведём через точку A прямую, параллельную KL. Она пересечёт сторону BC в точке X. Треугольники BKL и BAX подобны, следовательно $BX = \frac{AB \cdot BL}{BK} = \frac{13 \cdot 1}{\frac{14}{13}} = \frac{169}{14}$, откуда $CX = BC - BX = 14 - \frac{169}{14} = \frac{27}{14}$.

Треугольник MNC подобен треугольнику XAC с коэффициентом $\frac{1}{3}$.

$$S_{MNC} = \frac{1}{9} S_{XAC} = \frac{1}{9} \cdot \frac{XC}{BC} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{9} \cdot \frac{\frac{27}{14}}{14} \cdot 84 = \frac{9}{7}.$$

$$S_{KLMN} = S_{ABC} - S_{KBL} - S_{ANK} - S_{MNC} = 84 - \frac{84}{169} - \frac{8680}{169} - \frac{9}{7} = \frac{36503}{1183} = 30\frac{1013}{1183}$$

9 класс
2 вариант

1. (2 балла) В бесконечном турнире по волейболу участвуют 33 команды. Каждый утро организатор составляет расписание матчей на сегодня. Каждый день 32 команды разбиваются на пары и играют по одному матчу, одна команда отдыхает. Каждый матч заканчивается победой одной из команд, ничьих не бывает.

Докажите, что организатор может так составлять расписания, что рано или поздно обязательно появится команда, проигравшая шесть матчей подряд.

2. (2 балла) Решите ребус $OTC + OCT = CTO$. (Разные буквы обозначают разные цифры, числа не могут начинаться с нуля).

Ответ: $459 + 495 = 954$.

3. (2 балла) Шахматная фигура *четырёхлинейка* бьёт две вертикали и две горизонтали, соседние с клеткой, на которой она стоит. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга четырёхлинеек можно поставить на доске 10×10?

Ответ: 25

4. (3 балла) Вася нашёл треугольник со сторонами a, b, c и составил квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$. У этого трёхчлена нашлись два корня. Докажите, что они одновременно не могут быть больше, чем $-\frac{1}{3}$.

5. (3 балла) В ряд по вертикали по возрастанию выписаны числа от 1 до 100. Между ними вставляют дробные черточки разных размеров. При этом вычисление начинается с самой маленькой дробной черты и заканчивается самой большой, например, $\dfrac{1}{\frac{\frac{4}{5}}{3}} = \dfrac{15}{4}$.

Какое наибольшее значение может иметь полученная дробь?

Ответ: $\frac{100!}{4}$.

6. (3 балла) Точки X, Y, Z лежат на одной прямой, причем именно в таком порядке. ω_1, ω_2, ω_3 — окружности с диаметрами XZ, XY, YZ соответственно. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точке A, потом окружность ω_3 в точках B и C (в таком порядке), дальше окружность ω_2 в точке D, и наконец, проходит через точку X. Докажите, что $AB = CD$.

7. (4 балла) Докажите, что если выпуклый 108-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы из каждой вершины выходило либо ровно три диагонали, либо ни одной, то количество получившихся треугольников, у которых все три стороны являются диагоналями исходного многоугольника, составит ровно 36.

8. (4 балла) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 14$, $BC = 13$, $AC = 15$. На стороне AB отмечена точка K, на стороне AC – точка L, на стороне BC – точка N. Известно, что $AK = \frac{15}{14}$, $BN = 9$, $AL = 1$. Через точку N провели прямую, параллельную KL, она пересекла сторону AC в точке M. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$.

Ответ: $\frac{36503}{1183} = 30\frac{1013}{1183}$.