11 класс
1 вариант

1. (2 балла) Решите систему:

$$\begin{cases} \left|\frac{\ln x}{\ln 2}\right| + \frac{4x^2}{15} - \frac{16}{15} = 0 \\ \frac{\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\ln 7} + 12x - 5 = 0 \end{cases}$$

Ответ: Решений нет.

Решение:

Рассмотрим второе уравнение системы. При $x \geqslant \frac{5}{12}$ логарифм положителен, а $12x-5$ неотрицательно. При $x \leqslant \frac{1}{3}$ логарифм неположителен, а $12x-5$ отрицательно. Значит, все корни этого уравнения, сколько бы их ни было, находятся между числами $\frac{1}{3}$ и $\frac{5}{12}$.

На этом интервале $\ln x < 0$, поэтому первое уравнения приобретает вид

$$\frac{\ln x}{\ln 2} = \frac{4x^2}{15} - \frac{16}{15}.$$

Оно имеет не более двух корней, так как в правой части стоит выпуклая функция, а в левой вогнутая (допускаются соображения графического характера). При этом один из корней данного уравнения больше 2, так как при $x=2$ левая часть больше правой, а, например, при $x=1024$ наоборот, меньше $(10 < \frac{4}{15}\cdot(1024^2-16))$. Меньший же корень этого уравнения равен $\frac{1}{2}$. Таким образом, в указанный промежуток ни один их корней не попадает.

Вместо этого можно заметить, между числами $\frac{1}{3}$ и $\frac{5}{12}$. функция $\frac{\ln x}{\ln 2} - \frac{4x^2}{15} + \frac{16}{15}$ убывает (производная отрицательна), а на границах промежутка значения функции одного знака (меньше 0), поэтому корней у функции нет.

2. (2 балла) В пространстве дано сто единичных векторов, сумма которых равна нулевому вектору. Можно ли выбрать из них несколько таких, что их сумма имеет длину хотя бы 60?

Ответ: Нет.

Решение: Предположим, что мы выбрали такой набор векторов. Длина суммы векторов не больше суммы их длин – значит, если мы выбрали не больше 59 векторов, длина их суммы не может превосходить 59. Следовательно, мы выбрали хотя бы 60 векторов. Но тогда осталось не более 40 векторов, и длина их суммы не может превосходить 40, а она должна быть также равна 60. Противоречие.

Значит, требуемый набор векторов выбрать нельзя.

3. (2 балла) Известно, что $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} b$ натуральные, $\operatorname{tg}(a+b)$ целое. Найдите $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} b$.

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} a = 1, \operatorname{tg} b = 2 \\ \operatorname{tg} a = 1, \operatorname{tg} b = 3 \\ \operatorname{tg} a = 2, \operatorname{tg} b = 1 \\ \operatorname{tg} a = 3, \operatorname{tg} b = 1 \\ \operatorname{tg} a = 2, \operatorname{tg} b = 3 \\ \operatorname{tg} a = 3, \operatorname{tg} b = 2 \end{array}\right.$$

Решение: Обозначим $x = \operatorname{tg} a$ и $y = \operatorname{tg} b$. Из формулы тангенса суммы получаем:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Таким образом, чтобы $\operatorname{tg}(a+b)$ был целым числом, $x+y$ должно делится на $xy-1$. Так как x и y натуральные, $x+y$ и $xy-1$ тоже натуральные (если только $xy-1 \neq 0$). Следовательно, $x+y \geqslant xy-1$, т.е. $xy-x-y+1 \leqslant 2$. Раскладывая левую часть на множители, получаем $(x-1)(y-1) \leqslant 2$.

Предположим, что $x = 1$. Тогда должно $y+1$ должно делиться на $y-1$, но разность этих чисел равна 2 и тоже делится на $y-1$. Значит, $y-1$ или 1, или 2, т.е. $y=2$ или $y=3$. Нетрудно видеть, что оба случая подходят. Аналогичная разбираем случай $y=1$.

Если левая часть неравенства $(x-1)(y-1) \leqslant 2$ не равна 0, значит числа $x-1$ и $y-1$ не превосходят двойка, при этом двойке может быть равно только одно из них. Разбирая случаи $x=2, y=3$; $x=3, y=3$ и $x=2, y=2$, получаем, что первые два нас устраивают, а третий - нет.

Отсюда получаем ответы.

4. (3 балла) Программа "Весёлый многочлен" может производить с многочленом $P(x)$ следующие операции:

1) превращать $P(x)$ в $xP'(x)$, где $P'(x)$ – производная многочлена $P(x)$;
2) делить коэффициент при x^k на k для любого натурального k;
3) прибавлять к имеющемуся многочлену любую константу;
4) убирать из многочлена одночлен старшей степени.

Может ли она за несколько таких операций получить из многочлена $x^{17}+2x^{15}+4x^9+x^6+4x^3+2x+1$ многочлен $3x+1$?

Ответ: Нет.

Решение: Операции 1), 2) или 3) не меняют коэффициент при x. Операция 4) может оставить его прежним или превратить в 0. Таким образом, из коэффициента 2 коэффициент 3 никак не получить.

5. (4 балла) В правильной треугольной пирамиде (не являющейся правильным тетраэдром) площадь основанияв четыре раза меньше площади боковой грани. Высота пирамиды имеет длину 130 см.

Построим следующую (бесконечную) последовательность сфер. Пусть S_1 – вписанная сфера этой пирамиды. Тогда S_2 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_1; S_3 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_2, не равная S_1 и т.д.; S_{n+1} – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_n, не равная S_{n-1}.

Найдите суммарный объём всех этих сфер.

Ответ: $\frac{8788}{2598}\pi$ дм^3.

Решение: Обозначим площадь основания за S, высоту пирамиды за h, радиус сферы S_1 за r. Тогда выразив объём тетраэдра двумя способами, получаем равенство $\frac{1}{3}\cdot 13S\cdot r = \frac{1}{3}Sh$, откуда $r = \frac{h}{13} = 10$ см.

Так как пирамида правильная, центры сфер S_1 и S_2 а также точка их касания лежат на высоте пирамиды, а плоскость, касающаяся сфер в точке их касания, параллельна основанию пирамиды. Следовательно, она отсекает от исходной пирамиды подобную ей пирамиду с высотой $h-2r = 110$ см. Значит, радиус сферы S_2 составляет $\frac{11}{13}$ от радиуса сферы S_1. Аналогично радиус каждой следующей сферы составляет $\frac{11}{13}$ от радиуса предыдущей сферы.

Значит, их объёмы составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{4}{3}\pi r^3$ и частным $\frac{11^3}{13^3}$. Её сумма равна $\frac{\frac{4}{3}\pi 10^3}{1-\frac{11^3}{13^3}} = \frac{\frac{4}{3}\pi 1000}{\frac{866}{2197}}$ см^3 или $\frac{8788}{2598}\pi$ дм^3.

6. (4 балла) $ABCDE$ – вписанный пятиугольник. Окружность ω касается его описанной окружности в точке E. Прямая BC пересекает окружность ω в точках K и L, причём K лежит на луче ED, а L на луче EA. P и Q — точки пересечения описанных окружностей треугольников LCD и ACK с ω соответственно (не совпадающие с L и K). Докажите, что прямые AQ и PD пересекаются на прямой EC.

Решение:

Точки K и L лежат на пересечениях продолжений сторон пятиугольника, следовательно, находятся снаружи его описанной окружности, т.е. описанная окружность пятиугольника лежит внутри окружности ω.

Поскольку описанная окружность пятиугольника $ABCDE$ касается окружности ω в вершине E, первая переводится во вторую преобразованием подобия. Это преобразование также переводит точку D в точку K, а точку A в точку L. Значит, $AD \parallel KL$. (Эти рассуждения можно заменить рассмотрением углов между касательными и хордами).

Точку пересечения прямой EC и окружности ω, отличную от E, назовём X. Докажем, что это и есть искомая точка пересечения.

Пусть Y – точка пересечения EC и PD, Z – точка пересечния EC и AQ.

$\angle PXE = \angle PLE$, так как они опираются на одну дугу окружности ω. Далее, $\angle PLE = \angle KLE - \angle KLP = \angle DAE - \angle CLP$ (равенство углов $\angle KLE$ и DAE следует из параллельности AD и KL). Кроме того, $\angle CLP = 180^\circ - \angle CDP$ из вписанности четырёхугольника $CLPD$.

Значит, $\angle PXE = \angle DAE - (180^\circ - \angle CDP) = \angle DCE - \angle CDY = \angle DYC = \angle PYE$. Следовательно, точка Y также лежит на окружности ω, то есть совпадает с X. Аналогично Z совпадает с X, следовательно, прямые PD, AQ и EC пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

7. (5 баллов) Положительные числа a, b, c связаны соотношением $1 + a + b + c = 2abc$. Докажите неравенство

$$\frac{ab}{1+a+b} + \frac{bc}{1+b+c} + \frac{ca}{1+c+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение:

Сделаем замену переменных: $x = 1+\frac{1}{a}$, $y = 1+\frac{1}{b}$, $z = 1+\frac{1}{c}$. Исходное соотношение перепишем в виде: $\frac{1}{abc} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 2$.

Тогда $xyz = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{abc} = 1 + (x + y + z - 3) + 2 = (x + y + z)$.

$$\frac{ab}{1+a+b} = \frac{1}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{xy-1} = \frac{z}{xyz - z} = \frac{z}{x+y}.$$

Проводя аналогичные преобразования с двумя другими дробями, мы получаем, что неравенство, которое необходимо доказать, принимает вид:

$$\frac{z}{x+y} + \frac{y}{x+z} + \frac{x}{y+z} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Это неравенство верно для любых положительных чисел и доказывается, например, так: пусть одно из чисел x, y и z больше другого – например $x > z$. Тогда заменим их на $x + t$ и $z - t$, так, чтобы $x \geqslant z + t$. Второе слагаемое в скобочках в левой части не изменится, а первое и третье превратятся в

$$\frac{z+t}{x+y-t} + \frac{x-t}{y+z+t} = \frac{(z+t)(y+z+t)+(x-t)(x+y-t)}{(x+y-t)(y+z+t)} = \frac{z(y+z)+x(x+y)+2t(z+t-x)}{(x+y)(y+z)-t(z+t-x)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{z(y+z)+x(x+y)}{(x+y)(y+z)} = \frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z}.$$

Таким образом, мы сблизили два числа из трёх с сохранением их суммы и уменьшили левую часть неравенства. Двумя такими операциями можно добиться того, чтобы числа x, y и z стали равны, тогда правая и левая часть неравенства также совпадут. Значит, изначально левая часть была больше, что и требовалось доказать.

8. (5 баллов) В клетках таблицы $(2k+1) \times (2n+1)$, где $k \leqslant n$, расставлены числа 1, 2 и 3, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: $9kn + 6n + 5k + 3$.

Решение:

В ходе решения всегда первая из указанных сторон прямоугольника будет горизонтальной, вторая – вертикальной.

Докажем данную оценку индукцией по $k+n$. В качестве базы возьмём полоску $(2n+1) \times 1$. (при $k = 0$). Для неё, очевидно, сумма чисел не больше $6n + 3$, т.е. утроенного количества клеток.

Теперь докажем индукционный переход. Рассмотрим левый верхний квадрат 2×2 прямоугольника
$(2n+1)\times(2k+1)$. В нём есть как минимум две не-тройки, и как минимум одна из них находится на стороне или в углу прямоугольника. Назовём эту клетку *отмеченной.*

Первый случай: $n > k$ и отмеченная клетка находится на длинной (гориoнтальной) стороне прямоугольника (возможно, в углу). Разобъём прямоугольник на три части:

1) Прямоугольник 2×1, содержащий данную отмеченную клетку и угловую клетку. В нём сумма чисел не более $2 + 3 = 5$, так как хотя бы в одной из клеток находится не тройка.

2) Прямоугольник $2 \times 2k$, находящийся под первым прямоугольником. Он, в свою очередь, разбивается на k квадратов 2×2, в каждом из которых сумма не больше 9.

3) Оставшийся прямоугольник $(2(n-1)+1)\times(2k+1)$. Поскольку $n > k$, $n-1 \geqslant k$ и к этому прямоугольнику можно применить индукционное предположение. Следовательно, в нём сумма чисел не больше
$9(n-1)k + 6(n-1) + 5k - 3 = 9kn + 6n - 4k - 3$.

Общая сумма чисел получается не больше $5 + 9k + 9kn + 6n - 4k + 3 = 9kn + 6n + 5k + 2$.

Второй случай: $n > k$ и отмеченная клетка находится на короткой (вертикальной) стороне прямоугольника. Разобъём прямоугольник на три части:

1) Прямоугольник 1×2, содержащий данную отмеченную клетку и угловую клетку. В нём сумма чисел не более $2 + 3 = 5$, так как хотя бы в одной из клеток находится не тройка.

2) Прямоугольник $2n\times2$, находящийся слева от первого прямоугольника. Он, в свою очередь, разбивается на n квадратов 2×2, в каждом из которых сумма не более 9.

3) Оставшийся прямоугольник $(2n + 1) \times (2(k - 1) + 1)$. Поскольку $n > k$, неравенство $n \geqslant k - 1$ тем более выполняется, и к этому прямоугольнику можно применить индукционное предположение. Следовательно, в нём сумма чисел не болеее $9n(k-1) + 6n + 5(k-1) + 3 = 9kn - 3n + 5k - 2$.

Общая сумма чисел получается не более $5 + 9n + 9kn - 3n + 5k - 2 = 9kn + 6n + 5k + 3$.

Наконец, третий случай $k = n$. Не умаляя общности, можно считать, что отмеченная клетка находится на вертикальной стороне прямоугольника. Разобъём прямоугольник на три части:

1) Прямоугольник 1×2, содержащий данную отмеченную клетку и угловую клетку. В нём сумма чисел не более $2 + 3 = 5$, так как хотя бы в одной из клеток находится не тройка.

2) Прямоугольник $2k\times2$, находящийся слева от первого пямоугольника. Он, в свою очередь, разбивается на k квадратов 2×2, в каждом из которых сумма не больше 9.

3) Оставшийся прямоугольник $(2k + 1) \times (2(k - 1) + 1)$. Так как $k \geqslant k - 1$ к этому прямоугольнику также можно применить индукционное предположение. Следовательно, в нём сумма чисел не меньше $9k(k-1) + 6k + 5(k-1) + 3 = 9k^2 + 2k - 2$.

$5 + 9k + 9k^2 + 2k - 29k^2 + 11k + 3$, что и требуется.

Таким образом, оценка доказана.

Пример строится следующим образом: $n + 1$ горизонталь, идущая через одну начиная с верхней, заполняется тройками. Оставшиеся горизонтали заполнены чередующимися двойками и единицами начиная с двойки.

11 класс
2 вариант

1. (2 балла) Решите систему:

$$\begin{cases} \left|\frac{\ln x}{\ln 3}\right| + \frac{9x^2}{80} - 81/80 = 0 \\ \frac{\ln(x+\frac{4}{5})}{\ln 7} + 4x - 1 = 0 \end{cases}$$

Ответ: Решений нет.

2. (2 балла) В пространстве дано двести единичных векторов, сумма которых равна нулевому вектору. Можно ли выбрать из них несколько таких, что их сумма имеет длину хотя бы 111?

Ответ: Нет.

3. (2 балла) Известно, что $\operatorname{tg} a$ и $-\operatorname{tg} b$ натуральные, $\operatorname{tg}(a-b)$ целое. Найдите $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} b$.

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} a = 1, \operatorname{tg} b = -2 \\ \operatorname{tg} a = 1, \operatorname{tg} b = -3 \\ \operatorname{tg} a = 2, \operatorname{tg} b = -1 \\ \operatorname{tg} a = 3, \operatorname{tg} b = -1 \\ \operatorname{tg} a = 2, \operatorname{tg} b = -3 \\ \operatorname{tg} a = 3, \operatorname{tg} b = -2 \end{array}\right.$$

4. (3 балла) Программа "Весёлый многочлен" может производить с многочленом $P(x)$ следующие операции:

1) превращать $P(x)$ в $xP'(x)$, где $P'(x)$ – производная многочлена $P(x)$;
2) делить коэффициент при x^k на k для любого натурального k;
3) прибавлять к имеющемуся многочлену любую константу;
4) убирать из многочлена одночлен старшей степени.

Может ли она за несколько таких операций получить из многочлена $2x^{18}+2x^{14}+3x^{10}+x^6+4x^5+3x^2+4x+2$ многочлен $2x+1$?

Ответ: Нет.

5. (3 балла) В правильной треугольной пирамиде (не являющейся правильным тетраэдром) площадь основанияв три раза меньше площади боковой грани. Высота пирамиды имеет длину 10 см.

Построим следующую (бесконечную) последовательность сфер. Пусть S_1 – вписанная сфера этой пирамиды. Тогда S_2 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_1; S_3 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_2, не равная S_1 и т.д.; S_{n+1} – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_n, не равная S_{n-1}.

Найдите суммарный объём всех этих сфер.

Ответ: $\frac{500}{183}\pi$ см^3.

6. (4 балла) Пусть ω — описанная окружность треугольника ABC. Точки D, E и F на сторонах BC, CA и AB таковы, что описанная окружность треугольника DEF касается окружности ω в вершине B. P и Q — точки пересечения описанных окружностей треугольника CEF и ADE с ω соответственно (не совпадающие с C и A). Докажите, что прямые PF и DQ пересекаются на прямой BE.

7. (5 баллов) Положительные числа a, b, c связаны соотношением $1+2a+2b+2c=16abc$. Докажите неравенство

$$\frac{8ab}{1+2a+2b}+\frac{8bc}{1+2b+2c}+\frac{8ca}{1+2c+2a} \geqslant 3.$$

8. (5 баллов) В клетках таблицы $(2k-1)\times(2n-1)$, где $k \geqslant n$, расставлены числа 0, 1 и 2, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: $5kn-2n-k$.

11 класс
3 вариант

1. (2 балла) Решите систему:

$$\begin{cases} \left|\frac{\ln x}{\ln 3}\right| + \frac{9x^2}{35} - 36/35 = 0 \\ \frac{\ln\left(x+\frac{5}{6}\right)}{\ln 5} + 5x - 1 = 0 \end{cases}$$

Ответ: Решений нет.

2. (2 балла) В пространстве дано пятьдесят векторов длины 2, сумма которых равна нулевому вектору. Можно ли выбрать из них несколько таких, что их сумма имеет длину хотя бы 55?

Ответ: Нет.

3. (2 балла) Известно, что $\operatorname{ctg} a$ и $\operatorname{ctg} b$ натуральные, $\operatorname{tg}(a+b)$ целое. Найдите $\operatorname{ctg} a$ и $\operatorname{ctg} b$.

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} a = 1, \operatorname{ctg} b = 2 \\ \operatorname{ctg} a = 1, \operatorname{ctg} b = 3 \\ \operatorname{ctg} a = 2, \operatorname{ctg} b = 1 \\ \operatorname{ctg} a = 3, \operatorname{ctg} b = 1 \\ \operatorname{ctg} a = 2, \operatorname{ctg} b = 3 \\ \operatorname{ctg} a = 3, \operatorname{ctg} b = 2 \end{array}\right.$$

4. (3 балла) Программа “Весёлый многочлен” может производить с многочленом $P(x)$ следующие операции:

1) превращать $P(x)$ в $xP'(x)$, где $P'(x)$ – производная многочлена $P(x)$;
2) делить коэффициент при x^k на k для любого натурального k;
3) прибавлять к имеющемуся многочлену любую константу;
4) убирать из многочлена одночлен старшей степени.

Может ли она за несколько таких операций получить из многочлена $4x^{16} + 2x^{13} + 4x^8 + 5x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x + 3$ многочлен $5x + 2$?

Ответ: Нет.

5. (3 балла) В правильной треугольной пирамиде (не являющейся правильным тетраэдром) площадь основанияв два раза больше площади боковой грани. Высота пирамиды имеет длину 50 см.

Построим следующую (бесконечную) последовательность сфер. Пусть S_1 – вписанная сфера этой пирамиды. Тогда S_2 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_1; S_3 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_2, не равная S_1 и т.д.; S_{n+1} – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_n, не равная S_{n-1}.

Найдите суммарный объём всех этих сфер.

Ответ: $\frac{1000}{93}\pi$ дм^3.

6. (4 балла) $ABCDE$ – вписанный пятиугольник. Окружность ω касается его описанной окружности в точке A. Прямая CD пересекает окружность ω в точках K и L, причём K лежит на луче AB, а L на луче AE. M и N — точки пересечения описанных окружностей треугольников KCE и BCL с ω соответственно (не совпадающие с K и L). Докажите, что прямые ME и NB пересекаются на прямой AC.

7. (5 баллов) Положительные числа x, y, z связаны соотношением $1 + x + y + z = 2xyz$. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{1+x+y} + \frac{xz}{1+x+z} + \frac{yz}{1+z+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

8. (5 баллов) В клетках таблицы $(2m+1) \times (2n+1)$ где $m \leqslant n$, расставлены числа 0, 1 и 2, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: $3mn + m$.

11 класс
4 вариант

1. (2 балла) Решите систему:

$$\begin{cases} \left|\frac{\ln x}{\ln 2}\right| + \frac{4x^2}{35} - 36/35 = 0 \\ \frac{\ln\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\ln 5} + 3x - 1 = 0 \end{cases}$$

Ответ: Решений нет.

2. (2 балла) В пространстве дано сто векторов длины 2, сумма которых равна нулевому вектору. Можно ли выбрать из них несколько таких, что их сумма имеет длину хотя бы 105?

Ответ: Нет.

3. (2 балла) Известно, что $\operatorname{ctg} a$ и $-\operatorname{ctg} b$ натуральные, $\operatorname{tg}(a-b)$ целое. Найдите $\operatorname{ctg} a$ и $\operatorname{ctg} b$.

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} a = 1, \operatorname{ctg} b = -2 \\ \operatorname{ctg} a = 1, \operatorname{ctg} b = -3 \\ \operatorname{ctg} a = 2, \operatorname{ctg} b = -1 \\ \operatorname{ctg} a = 3, \operatorname{ctg} b = -1 \\ \operatorname{ctg} a = 2, \operatorname{ctg} b = -3 \\ \operatorname{ctg} a = 3, \operatorname{ctg} b = -2 \end{array}\right.$$

4. (3 балла) Программа "Весёлый многочлен" может производить с многочленом $P(x)$ следующие операции:

1) превращать $P(x)$ в $xP'(x)$, где $P'(x)$ – производная многочлена $P(x)$;
2) делить коэффициент при x^k на k для любого натурального k;
3) прибавлять к имеющемуся многочлену любую константу;
4) убирать из многочлена одночлен старшей степени.

Может ли она за несколько таких операций получить из многочлена $3x^{19} + 3x^{16} + x^{12} - 11x^{10} + 2x^8 - 4x^3 + 2x + 1$ многочлен $5x - 1$?

Ответ: Нет.

5. (3 балла) В правильной треугольной пирамиде (не являющейся правильным тетраэдром) площадь основания в два раза меньше площади боковой грани. Высота пирамиды имеет длину 70 см.

Построим следующую (бесконечную) последовательность сфер. Пусть S_1 – вписанная сфера этой пирамиды. Тогда S_2 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_1; S_3 – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_2, не равная S_1 и т.д.; S_{n+1} – сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_n, не равная S_{n-1}.

Найдите суммарный объём всех этих сфер.

Ответ: $\frac{686}{327}\pi$ дм^3.

6. (4 балла) Пусть ω — описанная окружность треугольника ABC. Точки D, E и F на сторонах BC, CA и AB таковы, что описанная окружность треугольника DEF касается окружности ω в вершине A. G и H — точки пересечения описанных окружностей треугольников BDE и CDF с ω соответственно (не совпадающие с B и C). Докажите, что прямые GE и HF пересекаются на прямой AD.

7. (5 баллов) Положительные числа x, y, z связаны соотношением $1+2x+2y+2z = 16xyz$. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{1+2x+2y} + \frac{xz}{1+2x+2z} + \frac{yz}{1+2z+2y} \geqslant \frac{3}{8}.$$

8. (5 баллов) В клетках таблицы $(2m-1)\times(2n-1)$, где $m \geqslant n$, расставлены числа 1, 2 и 3, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наменьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: $7mn - 5m - 4n + 3$.