

Задания второго отборочного этапа

11 класс

Типовой вариант

Задача 1. (2 балла)

Известно, что $(\log_x^2 y + \log_z^2 t)(\log_y^2 z + \log_t^2 x) = 96$ и $\log_x z + \log_z x = 6$. Найдите $\log_y t + \log_t y$. Если возможных ответов несколько, укажите их все в порядке возрастания через запятую или точку с запятой.

Ответ: -8; 8

Задача 2. (2 балла)

Какое наибольшее количество попарно различных единичных векторов можно построить в пространстве так, чтобы любые два образовывали угол, кратный 60° ?

Ответ: 6

Задача 3. (3 балла)

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 35$, $BC = 10$ и боковыми сторонами $AB = 15$ и $CD = 20$. Окружность S_1 проходит через точки B и C и касается стороны AD . Окружность S_2 касается окружности S_1 а также стороны BC в её середине с внешней стороны трапеции. Найдите радиус окружности S_2 .

Если ответ дробный и не записывается в виде конечной десятичной дроби, записывайте его в виде неправильной дроби, не округляйте!

Ответ: 25/24

Задача 4. (3 балла)

Дана функция $f(x) = x^2 + 3$. Решите уравнение $\underbrace{f(f(\dots(7x-3)\dots))}_{10 \text{ раз}} = \underbrace{f(f(\dots(x)\dots))}_{11 \text{ раз}}$.

Если возможных ответов несколько, укажите их все в порядке возрастания через запятую или точку с запятой.

Ответ: -7; 0; 1; 6

Задача 5. (3 балла)

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = A_1 B_1 = CD = C_1 D_1 = 10$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 5$, $AD = BC = B_1 C_1 = A_1 D_1 = 12$. Найдите объем пересечения тетраэдров $ACB_1 D_1$ и

$A_1 C_1 B D$.

Ответ: 100

Задача 6. (3 балла)

Пусть $f(x) = \sin(\pi x)$. Сколько корней на промежутке $[0; 1]$ имеет функция $\underbrace{f(f(f(\dots f(x)\dots)))}_{20 \text{ раз}}$?

Ответ: $524289 = 2^{19} + 1$

Задача 7. (3 балла)

$P(x)$ — многочлен третьей степени, такой что многочлен $P(x) + 5P'(x)$ имеет три различных корня, образующих арифметическую прогрессию с разностью $13\sqrt{3}$. Найдите разность между большим и меньшим корнями многочлена $P'(x)$. Если у этого многочлена один корень, эта разность равна нулю, если корней нет — напишите «нет».

Ответ: 24

Задача 8. (4 балла)

Решите в простых числах уравнение $p^2 - 58p = 2q^2 - 26q - 697$. В ответе укажите все возможные значения p в порядке возрастания через запятую или точку с запятой.

Ответ: 17; 19; 37; 41

Задача 9. (4 балла)

Найдите площадь множества положительных решений неравенства, где квадратные скобки обозначают целую часть, а фигурные — дробную:

$$\{x\} + \{y\} \leq \sqrt{\frac{5^{-\{x+y\}}}{\{x+y+1\}}}$$

Ответ: 5/8

Задача 10. (5 баллов)

На поле 10×10 закрашены некоторые клетки так, что в каждой строчке и в каждом столбце есть хотя бы одна закрашенная клетка. Для каждой строчки Аня посчитала количество закрашенных клеток в ней, получившиеся числа она перемножила. Дима посчитал количество закрашенных клеток в каждом столбце и также перемножил получившиеся у него числа. При каком количестве закрашенных клеток частное Аниного и Диминого произведений получается максимальным?

Ответ: 37