

Типовой вариант

Задача 1. (1 балл)

Дан клетчатый куб $8 \times 8 \times 8$. Поясом назовём множество из 32 клеток его поверхности, центры которых лежат в одной плоскости, параллельной одной из граней куба. Эти клетки образуют четыре линии по восемь клеток, продолжающимися друг друга за рёбра куба.

В клетках поверхности куба расставили целые неотрицательные числа так, чтобы в каждом поясе сумма чисел была равна 100. Какова может быть максимальная сумма чисел на всей поверхности куба?

Ответ: 1200

Задача 2. (2 балла)

$\{A_k\}$ – множество точек на плоскости такое, что $A_1A_kA_{k+1}$ – прямоугольный треугольник с прямым углом A_k . Известно, что $A_{k-1}A_k = \sqrt{k+48}$. Найдите A_1A_{100} .

Ответ: 99

Задача 3. (2 балла)

Известно, что $\cos x - \cos y = 1$ и $\cos 2x - \cos 2y = 1$.

Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Ответ: -2

Задача 4. (2 балла)

Решите неравенство $x < \min(f(x), g(x), h(x))$, где

$$f(x) = -x^2 + 2,5x + 2,5 \text{ при } x \text{ не больших } 1, f(x) = 18 \text{ при } x > 1.$$

$$g(x) = x^2 - 5x + 8$$

$$h(x) = -2x + 18.$$

В ответе укажите промежуток, на котором выполняется неравенство. В случае, если промежутков несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой

Ответ: (-1; 2); (4; 6)

Задача 5. (3 балла)

В окружность радиуса 4 вписан правильный 18-угольник. Из центра окружности ко всем вершинам этого 18-угольника проведены векторы. Найдите сумму всех попарных скалярных произведений различных векторов.

Ответ: -144

Задача 6. (3 балла)

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – взаимно обратные функции, определённые на всей числовой прямой, кроме 0 и

1. Известно, что $f(x)g(x) - f(x) + 1 = 0$. Найдите $\underbrace{f(f(\dots(3)\dots))}_{100 \text{ раз}}$. Если в ответе получится дробь, запишите её в виде неправильной дроби, не округляйте.

Ответ: 2/3

Задача 7. (3 балла)

$ABCD$ – вписанный четырёхугольник. X – точка пересечения лучей AB и DC , Y – прямых BC и AD . $AB = 12$, $AD = 12$, $CD = 6$, $DY = 8$. Найдите CX .

Ответ: 10

Задача 8. (3 балла)

Решите уравнение $p^2 - 2p = q^2 + 46q$ в простых числах. В ответе укажите число p . Если возможных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через запятую или точку с запятой.

Ответ: 17

Задача 8. (4 балла)

Даны 700 подряд идущих членов арифметической прогрессии (с ненулевой разностью). Какое наибольшее количество из них могут образовывать возрастающую геометрическую прогрессию со знаменателем, не равным 2?

Ответ: 7

Задача 10. (4 балла)

Дан треугольник ABC с углом $A = 25^\circ$, углом $C = 70^\circ$. Окружность O радиуса $10\sqrt{3}$ касается стороны AB в её середине с внешней стороны треугольника, а также его описанной окружности. Найдите расстояние между точками, в которых биссектриса угла C пересекает окружность O .

Ответ: 30