Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **1–1** (Кемерово)*

1. Решите систему $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \dfrac{y}{2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \dfrac{y}{2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{4x+1-12\sqrt{x-2}} + \sqrt{4x+8-16\sqrt{x-2}} \leqslant \log_{1/4}\left(x - \frac{17}{4}\right).$$

3. Две смежные боковые грани пирамиды, в основании которой лежит квадрат, перпендикулярны плоскости основания. Двугранный угол между двумя другими боковыми гранями равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите отношение высоты пирамиды к стороне основания.

4. Найдите все тройки натуральных чисел (m, n, k) такие, что

$$m^3 + n^3 = k! + 32.$$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2(x^2+1)^3 + (x^3+1)^2 = 12ax^3$$

имеет единственное решение.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **1–2** (Кемерово)*

1. Решите систему $\begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{tg} y = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{ctg} y = \dfrac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{4x-3-12\sqrt{x-3}} + \sqrt{4x+4-16\sqrt{x-3}} \leqslant \log_{1/4}\left(x - \frac{21}{4}\right).$$

3. Две смежные боковые грани пирамиды, в основании которой лежит квадрат, перпендикулярны плоскости основания. Найдите величину двугранного угла между двумя другими боковыми гранями, если высота пирамиды равна стороне основания.

4. Найдите все тройки натуральных чисел (m, n, k) такие, что

$$m^3 + n^3 = k! + 4.$$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2(x^3+1)^2 + (x^2+1)^3 = 12ax^3$$

имеет единственное решение.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **2–1** (Челябинск)*

1. Решите уравнение в целых числах $x + 3xy + y = 2019 - 3y^2$.

2. Решите уравнение $\log_{2/9} 2 = (\log_x 2) \cdot (\log_{4x} 2) \cdot (\log_{9x} 2)$.

3. При каких значениях a существует b такое, что уравнение

$$\sin^2 b \sin x + \cos^2 b \cos x = a$$

не имеет решений?

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD = \angle CDB$ и $\angle BAD = \angle CDA = 60°$.

а. Можно ли в четырёхугольник $ABCD$ вписать окружность?

б. Найдите минимум отношения стороны BC к стороне AD.

5. В 9:00 из пункта A в пункт B выехали велосипедист Петр и мотоциклист Василий, а из B в A по той же дороге выехал мотоциклист Георгий. В 10:00 мотоциклисты встретились и зашли в кафе, проведя там не менее 75 мин и расставшись в тот момент, когда Петр проезжал мимо. Продолжив движение, Василий прибыл в пункт B не позже 11:55, а Георгий прибыл в конечный пункт одновременно с Петром. Найдите время прибытия Петра и Георгия, если скорости всех участников постоянны.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **2–2** (Челябинск)*

1. Решите уравнение в целых числах $3xy - x - y = 2019 - 3x^2$.

2. Решите уравнение $\log_{3/4} 3 = (\log_x 3) \cdot (\log_{4x} 3) \cdot (\log_{9x} 3)$.

3. При каких значениях a существует b такое, что уравнение

$$(1 + \sin b) \sin x + (1 - \cos b) \cos x = a$$

не имеет решений?

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD = \angle CDB$ и $\angle BAD = \angle CDA = 60°$.

а. Можно ли в четырёхугольник $ABCD$ вписать окружность?

б. Найдите минимум отношения стороны BC к сумме сторон AB и CD.

5. В 10:00 из пункта A в пункт B выехали велосипедист Павел и автомобилист Виктор, а из B в A по той же дороге выехал мотоциклист Геннадий. В 10:30 Виктор остановился и зашёл в бар, проведя там не менее полутора часов, и вышел оттуда в тот момент, когда Павел и Геннадий проезжали мимо. Продолжив движение, Виктор и Геннадий прибыли в конечные пункты одновременно. Найдите время их прибытия, если скорости всех участников постоянны и Павел прибыл в пункт B не позже чем через 3 часа после Виктора.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант 4–1 (Нижний Новгород)

1. Все 11-классники спецшколы разделены на три отдельные категории: физики, химики и биологи. На каждых двоих биологов приходится 5 человек, считающихся физиками или химиками, а на каждых троих физиков приходится 7 человек, считающихся химиками или биологами. Найдите количество химиков, если 11-классников в школе не более 100.

2. Решите неравенство $\sqrt{2}\cos 2x \geqslant \sin x - \cos x$.

3. Найдите все возможные значения величины

$$T = \frac{f(t) - f(0)}{f\left(t^2\right) + f\left(t\right) - 2f\left(0\right) + 2},$$

если $f\left(2x + y\right) - f\left(x + y\right) = 2x$ для всех действительных значений x и y.

4. В равнобедренном треугольнике ABC на высоте BH, равной основанию AC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая боковую сторону BC в точке F. Каково отношение площади треугольника FCH к площади треугольника ABC? Какая часть площади треугольника ABC находится внутри окружности?

5. Решите уравнение

$$x^2 + 8\left\{x + 4\right\} - 9 = 0,$$

где $\{a\}$ – дробная часть числа a.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант 4–2 (Нижний Новгород)

1. Все 11-классники спецшколы разделены на три отдельные категории: экономисты, историки и филологи. На каждых двоих филологов приходится 3 человека, считающихся экономистами или историками, а на каждых пятерых экономистов приходится 7 человек, считающихся историками или филологами. Найдите количество историков, если 11-классников в школе не более 100.

2. Решите неравенство $\sqrt{2}\cos 2x + \sin x + \cos x \leqslant 0$.

3. Найдите все возможные значения величины

$$Z = \frac{2\left(f(z) - f(0)\right)}{f\left(z^2\right) + f\left(z\right) - 2f\left(0\right) + 2},$$

если $f\left(2x - y\right) - f\left(x - y\right) = 2x$ для всех действительных значений x и y.

4. В равнобедренном треугольнике ABC на высоте BH, которая в полтора раза больше основания AC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая боковую сторону BC в точке F. Каково отношение площади треугольника FCH к площади треугольника ABC? Какая часть площади треугольника ABC находится внутри окружности?

5. Решите уравнение

$$x^2 + 8\left\{4 - x\right\} - 9 = 0,$$

где $\{a\}$ – дробная часть числа a.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–1** (Уфа)*

1. Сумма шести первых членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, в 344 раза больше суммы трёх её первых членов. Найдите знаменатель прогрессии.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y\sqrt{2}}+\dfrac{1}{x\sqrt{2}-y}=1, \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2}+y}-\dfrac{1}{x+y\sqrt{2}}=-1. \end{cases}$$

3. Решите неравенство $\arcsin(\sin|x|) \geqslant \arccos|\cos 2x|$.

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC = 3\sqrt{2}$ и $AC = 2\sqrt{6}$. Высота пирамиды равна $\sqrt{6}$ и видна из вершин A и C под одним и тем же углом, равным $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Под каким углом она видна из вершины B?

5. Для каждого значения a решите уравнение

$$\left|x-2^{\frac{1}{\sin^2(2a)}}\right|+\left|x-2^{-4\operatorname{tg}(3a)}\right|+a\left(a+\frac{\pi}{12}\right)^2\left(a-\frac{\pi}{12}\right)=0.$$

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–2** (Уфа)*

1. Сумма пяти первых членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, в 244 раза меньше суммы десяти её первых членов. Найдите знаменатель прогрессии.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y\sqrt{3}}+\dfrac{1}{x\sqrt{3}-y}=2, \\ \dfrac{1}{x\sqrt{3}+y}-\dfrac{1}{x+y\sqrt{3}}=-2. \end{cases}$$

3. Решите неравенство $\arcsin(\sin|x|) \geqslant \arccos|\cos 3x|$.

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC = 5\sqrt{2}$ и $AC = 2\sqrt{10}$. Высота пирамиды равна $\sqrt{10}$ и видна из вершин A и C под одним и тем же углом, равным $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$. Под каким углом она видна из вершины B?

5. Для каждого значения a решите уравнение

$$\left|x+2^{\frac{1}{\sin^2(2a)}}\right|+\left|x+2^{4\operatorname{tg}(3a)}\right|+a\left(a-\frac{\pi}{12}\right)^2\left(a+\frac{\pi}{12}\right)=0.$$

март 2019 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–1** (Нижний Новгород)*

1. Найдите десятичную запись числа

$$\frac{(2x-x^2)\cdot 10^6}{33}+\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}\right),$$

если $x=0,9999$.

2. Числа $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{13}$ являются членами арифметической прогрессии с возрастающими номерами. Каково наибольшее значение разности этой прогрессии?

3. При всех значениях $a\in\mathbb{R}$ решите неравенство

$$\arccos\Big(\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big)+(x-a)^2\leqslant 2\operatorname{arctg}x.$$

4. В треугольнике ABC, $\angle A=2\alpha$, биссектрисы BD и CE пересекаются в точке I. Найдите наименьший возможный радиус окружности, описанной около треугольника DEI, если сумма длин отрезков DI и EI равна $2d$.

5. При каких значениях $n=1,2,\ldots,9$ уравнение

$$\left(\log_2^2\sin\left(\pi x+\frac{7\pi n}{6}\right)+\log_2\sin\left(\pi x+\frac{7\pi n}{6}\right)+0,5\right)\cdot$$
$$\cdot\log_2\left(9\cdot 3^{4x^2-6x}-2\cdot 3^{2x^2-3x+2}+17\right)=3\log_2\sin\left(\pi x+\frac{7\pi n}{6}\right)+1,5$$

имеет решение?

март 2019 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–2** (Нижний Новгород)*

1. Найдите десятичную запись числа

$$\frac{(2x-x^2)\cdot 10^5}{666}+2\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}\right),$$

если $x=0,999$.

2. Числа $\frac{1}{21}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{17}$ являются членами арифметической прогрессии с возрастающими номерами. Каково наибольшее значение разности этой прогрессии?

3. При всех значениях $a\in\mathbb{R}$ решите неравенство

$$\arccos\Big(\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big)+(a-x-1)^2\leqslant 2\operatorname{arctg}x.$$

4. В треугольнике ABC, $\angle B=2\beta$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке J. Найдите наименьший возможный радиус окружности, описанной около треугольника DEJ, если произведение длин отрезков DJ и EJ равна d^2.

5. При каких значениях $n=1,2,\ldots,9$ уравнение

$$\left(\log_2^2\cos\left(\pi x+\frac{7\pi n}{3}\right)+\log_2\cos\left(\pi x+\frac{7\pi n}{3}\right)+0,5\right)\cdot$$
$$\cdot\log_2\left(3^{4x^2-2x}-2\cdot 3^{2x^2-x+1}+17\right)=3\log_2\cos\left(\pi x+\frac{7\pi n}{3}\right)+1,5$$

имеет решение?

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7 – 1*** (Москва)

1. Стороны прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами, при этом гипотенуза на 1 длиннее одного из катетов. Может ли длина какого-то катета данного треугольника быть равна: а) 2019; б) 2018; в) 2112?

2. Аня выписала одно за другим 2018 чисел $\frac{1\cdot 2}{2}$, $\frac{2\cdot 3}{2}$, $\frac{3\cdot 4}{2}$, ..., $\frac{2018\cdot 2019}{2}$ и вычислила их. Сколько из получившихся чисел имеют в десятичной записи последнюю цифру 5?

3. Кривая на координатной плоскости задана уравнением

$$(|x|-5)^2+(y-4)^2=\left(2-\frac{|x|}{x}\right)^2.$$

Среди всех прямых, касающихся этой кривой в двух точках, найдите ту прямую, которая наименее удалена от точки с координатами $\left(10-4\sqrt{6};\ 6\right)$.

4. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB=3$, $AD=4$, $AC=6$, а площадь треугольника ABC равна площади треугольника ADC и в два раза больше площади треугольника ABD.

5. Определите значение функции

$$f(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

в точке $x=2018$, если $f(2019)=f(2023)=0$, $f(2020)=f(2022)=3$, $f(2021)=4$.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7 – 2*** (Москва)

1. Стороны прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами, при этом гипотенуза на 1 длиннее одного из катетов. Может ли длина какого-то катета данного треугольника быть равна: а) 2022; б) 2021; в) 1984?

2. Петя выписал одно за другим 2019 чисел $\frac{1\cdot 2}{2}$, $\frac{2\cdot 3}{2}$, $\frac{3\cdot 4}{2}$, ..., $\frac{2018\cdot 2019}{2}$ и вычислил их. Сколько из получившихся чисел имеют в десятичной записи последнюю цифру 8?

3. Кривая на координатной плоскости задана уравнением

$$(x-8)^2+(|y|-10)^2=\left(3-\frac{2\,|y|}{y}\right)^2.$$

Среди всех прямых, касающихся этой кривой в двух точках, найдите ту прямую, которая наименее удалена от точки с координатами $\left(11;\ 15-6\sqrt{6}\right)$.

4. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $KLMN$, в котором $KL=3$, $KN=5$, $KM=6$, а площадь треугольника KLM равна площади треугольника KMN и в два раза больше площади треугольника KLN.

5. Определите значение функции

$$f(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

в точке $x=2018$, если $f(2019)=f(2023)=0$, $f(2020)=f(2022)=-3$, $f(2021)=-4$.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7 – 3*** (Москва)

1. Стороны прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами, при этом гипотенуза на 1 длиннее одного из катетов. Может ли длина какого-то катета данного треугольника быть равна: а) 2017; б) 2020; в) 2112?

2. Таня выписала одно за другим 2018 чисел $\frac{1\cdot2}{2}$, $\frac{2\cdot3}{2}$, $\frac{3\cdot4}{2}$, ..., $\frac{2018\cdot2019}{2}$ и вычислила их. Сколько из получившихся чисел имеют в десятичной записи последнюю цифру 1?

3. Кривая на координатной плоскости задана уравнением

$$(|x|-5)^2+(y+4)^2=\left(2+\frac{|x|}{x}\right)^2.$$

Среди всех прямых, касающихся этой кривой в двух точках, найдите ту прямую, которая наименее удалена от точки с координатами $\left(4\sqrt{6}-10;\ -2\right)$.

4. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB=2$, $AD=3$, $AC=4$, а площадь треугольника ABC равна площади треугольника ADC и в два раза больше площади треугольника ABD.

5. Определите значение функции

$$f(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

в точке $x=2023$, если $f(2018)=f(2022)=0$, $f(2019)=f(2021)=3$, $f(2020)=4$.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7 – 4*** (Москва)

1. Стороны прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами, при этом гипотенуза на 1 длиннее одного из катетов. Может ли длина какого-то катета данного треугольника быть равна: а) 2020; б) 2021; в) 1984?

2. Вася выписал одно за другим 2019 чисел $\frac{1\cdot2}{2}$, $\frac{2\cdot3}{2}$, $\frac{3\cdot4}{2}$, ..., $\frac{2018\cdot2019}{2}$ и вычислил их. Сколько из получившихся чисел имеют в десятичной записи последнюю цифру 3?

3. Кривая на координатной плоскости задана уравнением

$$(x+8)^2+(|y|-10)^2=\left(3+\frac{2|y|}{y}\right)^2.$$

Среди всех прямых, касающихся этой кривой в двух точках, найдите ту прямую, которая наименее удалена от точки с координатами $\left(-5;\ 6\sqrt{6}-15\right)$.

4. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $KLMN$, в котором $KL=3$, $KN=2$, $KM=6$, а площадь треугольника KLM равна площади треугольника KMN и в два раза больше площади треугольника KLN.

5. Определите значение функции

$$f(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

в точке $x=2023$, если $f(2018)=f(2022)=0$, $f(2019)=f(2021)=-3$, $f(2020)=-4$.

март 2019 г.