Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробъёвы горы»

*Вариант **1–1** (Кемерово)*

1. Решите систему $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \dfrac{y}{2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \dfrac{y}{2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{4x+1-12\sqrt{x-2}}+\sqrt{4x+8-16\sqrt{x-2}} \leqslant \log_{1/4}\left(x-\frac{17}{4}\right).$$

3. Две смежные боковые грани пирамиды, в основании которой лежит квадрат, перпендикулярны плоскости основания. Двугранный угол между двумя другими боковыми гранями равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите отношение высоты пирамиды к стороне основания.

4. Найдите все тройки натуральных чисел (m, n, k) такие, что

$$m^3+n^3=k!+32.$$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2(x^2+1)^3+(x^3+1)^2=12ax^3$$

имеет единственное решение.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробъёвы горы»

*Вариант **1–2** (Кемерово)*

1. Решите систему $\begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{tg} y = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{ctg} y = \dfrac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{4x-3-12\sqrt{x-3}}+\sqrt{4x+4-16\sqrt{x-3}} \leqslant \log_{1/4}\left(x-\frac{21}{4}\right).$$

3. Две смежные боковые грани пирамиды, в основании которой лежит квадрат, перпендикулярны плоскости основания. Найдите величину двугранного угла между двумя другими боковыми гранями, если высота пирамиды равна стороне основания.

4. Найдите все тройки натуральных чисел (m, n, k) такие, что

$$m^3+n^3=k!+4.$$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2(x^3+1)^2+(x^2+1)^3=12ax^3$$

имеет единственное решение.

март 2019 г.

Ответы и решения к варианту ***1–1 (2)***

1. Обозначим $a = \operatorname{tg} x$, $b = \operatorname{tg}\frac{y}{2}$. Тогда $a + b = \frac{4}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Из второго уравнения следует, что $ab = 1$. По теореме Виета a и b удовлетворяют уравнению $t^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}t + 1 = 0$, корнями которого являются числа $\sqrt{3}$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Наша система равносильна совокупности двух систем: 1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \end{cases}$

или 2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. Ответ к варианту *1–2*: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{3} + \pi n$ или $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{6} + \pi n$.

2. Сделав замену $t = \sqrt{x-2}$ сведём неравенство к виду $|2t-3| + |2t-4| \leqslant \log_{1/4}\left(x - \frac{17}{4}\right)$. Т.к. $x > \frac{17}{4}$, то $t > \frac{3}{2}$.

При $t \in \left(\frac{3}{2}; 2\right]$ получаем: $1 \leqslant \log_{1/4}\left(x - \frac{17}{4}\right)$, откуда $x \in \left(\frac{17}{4}; \frac{9}{2}\right]$.

При $t > 2$ получаем: $4t - 7 \leqslant \log_{1/4}\left(x - \frac{17}{4}\right)$. Так как $t > 2$, то левая часть уравнения больше 1. С другой стороны при $t > 2$ получаем, что $x > 6$, а тогда $\left(x - \frac{17}{4}\right) > 1$ и $\log_{1/4}\left(x - \frac{17}{4}\right) < 0$.

Ответ: $\left(\frac{17}{4}; \frac{9}{2}\right]$. Ответ к варианту *1–2*: $\left(\frac{21}{4}; \frac{11}{2}\right]$.

3. Пусть $SABCD$ — данная пирамида, $AB = a$ — сторона квадрата, $SA = h$ — высота пирамиды. Проведём перпендикуляры BM и DM к ребру SC. Из теоремы о трёх перпендикулярах следует, что треугольники SBC и SDC прямоугольные. Тогда $MB = \dfrac{BC \cdot SB}{SC} = \dfrac{a \cdot \sqrt{a^2 + h^2}}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$. По теореме косинусов для равнобедренного треугольника DMB получаем $DB^2 = MB^2 + MD^2 - 2MB \cdot MD \cos\angle DMB \Leftrightarrow 2a^2 = 2\dfrac{a^2(a^2 + h^2)}{2a^2 + h^2} - 2\dfrac{a^2(a^2 + h^2)}{2a^2 + h^2} \cdot (-\dfrac{1}{2}) \Leftrightarrow a^2 = h^2 \Rightarrow h : a = 1 : 1$.

Ответ: $1 : 1$. Ответ к варианту *1–2*: $\frac{2\pi}{3}$.

4. Остатки от деления числа m^3 на 7, где $m = 7k + r$, при $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ равны $0, 1, 1, 6, 1, 6, 6$ соответственно. Поэтому остатки от деления суммы $m^3 + n^3$ на 7 могут равняться только $0, 1, 2, 5$ и 6. При $k \geqslant 7$ остаток от деления на 7 правой части данного уравнения равен 4, значит, $k \leqslant 6$. Перебирая $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, получаем

Ответ: $(m, n, k) = (3, 5, 5)$; $(5, 3, 5)$. Ответ к варианту *1–2*: $(m, n, k) = (3, 1, 4)$; $(1, 3, 4)$.

5. Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения ни при каком a. Преобразуем уравнение, разделив его на x^3:

$$(a^2 + 1)\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 12a.$$

Значит, если x_0 — корень уравнения, то $\frac{1}{x_0}$ — тоже его корень. Следовательно, единственным корнем может быть либо $x = 1$, либо $x = -1$.

В первом случае получаем $8a^2 + 4 = 12a$, откуда $a = 1$ или $a = \frac{1}{2}$, а во втором имеем $8a^2 = -12a$, откуда $a = 0$ или $a = -\frac{3}{2}$. Подставляя значения $a = -3/2$, $1/2$, 1, в уравнение $(a^2 + 1)t^3 - 3t + 2 - 12a = 0$, где $t = x + \frac{1}{x}$, убеждаемся, что при каждом из них оно имеет единственное решение $t = 2$ или $t = -2$, а исходное — соответственно единственное решение $x = 1$ или $x = -1$. В случае $a = 0$ уравнение $t^3 - 3t + 2 = 0$ имеем два решения $t = -2$ и $t = 1$. Корень $t = -2$ даёт решение $x = -1$, а корень $t = 1$ не дает решений по x.

Ответ: $a = -\frac{3}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1.

Ответ к варианту: *5–2*: $a = -\frac{2}{3}$, 1, 2.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **2–1** (Челябинск)*

1. Решите уравнение в целых числах $x + 3xy + y = 2019 - 3y^2$.

2. Решите уравнение $\log_{2/9} 2 = (\log_x 2) \cdot (\log_{4x} 2) \cdot (\log_{9x} 2)$.

3. При каких значениях a существует b такое, что уравнение

$$\sin^2 b \sin x + \cos^2 b \cos x = a$$

не имеет решений?

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD = \angle CDB$ и $\angle BAD = \angle CDA = 60°$.

а. Можно ли в четырёхугольник $ABCD$ вписать окружность?

б. Найдите минимум отношения стороны BC к стороне AD.

5. В 9:00 из пункта A в пункт B выехали велосипедист Петр и мотоциклист Василий, а из B в A по той же дороге выехал мотоциклист Георгий. В 10:00 мотоциклисты встретились и зашли в кафе, проведя там не менее 75 мин и расставшись в тот момент, когда Петр проезжал мимо. Продолжив движение, Василий прибыл в пункт B не позже 11:55, а Георгий прибыл в конечный пункт одновременно с Петром. Найдите время прибытия Петра и Георгия, если скорости всех участников постоянны.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **2–2** (Челябинск)*

1. Решите уравнение в целых числах $3xy - x - y = 2019 - 3x^2$.

2. Решите уравнение $\log_{3/4} 3 = (\log_x 3) \cdot (\log_{4x} 3) \cdot (\log_{9x} 3)$.

3. При каких значениях a существует b такое, что уравнение

$$(1 + \sin b) \sin x + (1 - \cos b) \cos x = a$$

не имеет решений?

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD = \angle CDB$ и $\angle BAD = \angle CDA = 60°$.

а. Можно ли в четырёхугольник $ABCD$ вписать окружность?

б. Найдите минимум отношения стороны BC к сумме сторон AB и CD.

5. В 10:00 из пункта A в пункт B выехали велосипедист Павел и автомобилист Виктор, а из B в A по той же дороге выехал мотоциклист Геннадий. В 10:30 Виктор остановился и зашёл в бар, проведя там не менее полутора часов, и вышел оттуда в тот момент, когда Павел и Геннадий проезжали мимо. Продолжив движение, Виктор и Геннадий прибыли в конечные пункты одновременно. Найдите время их прибытия, если скорости всех участников постоянны и Павел прибыл в пункт B не позже чем через 3 часа после Виктора.

март 2019 г.

1. $3y^2+3xy+x+y=2019 \Leftrightarrow (x+y)(3y+1)=2019$. Поскольку $2019=1\cdot 2019=3\cdot 673$ и $3y+1\equiv 1(\mod 3)$, то возможны следующие случаи $3y+1=1$, либо $3y+1=673$. Откуда $(x,y)=(-221,224)$, либо $(x,y)=(2019,0)$.

Ответ: $(x,y)=(-221,224)$, $(2019,0)$. Ответ к варианту: *2–2*: $(x,y)=(-224,221)$, $(0,-2019)$.

2. Выполнив замену $\log_2 x=t$ $(x>0, x\neq 1, x\neq 1/4, x\neq 1/9)$, приходим к уравнению $t(t+2)(t+\log_2 9)=1-\log_2 9$. У него угадывается корень $t=-1$, после чего оно приводится к виду

$$(t+1)(t^2+(\log_2 9+1)t+(\log_2 9-1))=0.$$

Дискриминант второй скобки равен $\log_2^2 9-2\log_2 9+5$ – это положительное число.

Ответ: $x=1/2$, $x=2^{\frac{-\log_2 9-1\pm\sqrt{\log_2^2 9-2\log_2 9+5}}{2}}$. Ответ к варианту: *2–2*: $x=1/3$, $x=3^{\frac{-\log_3 4-1\pm\sqrt{\log_3^2 4-2\log_3 4+5}}{2}}$.

3. Пользуясь методом вспомогательного аргумента, приходим к уравнению

$$\sqrt{\sin^4 b+\cos^4 b}\,\cos(x-\varphi(b))=a.$$

Ответом к задаче будут a, удовлетворяющие соотношению

$$|a|>\min_b\sqrt{\sin^4 b+\cos^4 b}=\min_b\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 2b}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $a\in(-\infty,-1/\sqrt{2})\cup(1/\sqrt{2},+\infty)$.

Замечание: Подразумевается, что уравнение может не иметь решений вообще ни при каких b. Ответ к варианту: *2–2*: $a\in(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}-1,+\infty)$.

4. Обозначим $x=AB$, $y=CD$. Достроим четырёхугольник $ABCD$ до равностороннего треугольника ADE (см. рис. 1). Из равенства треугольников $\triangle DEB=\triangle ADC$,

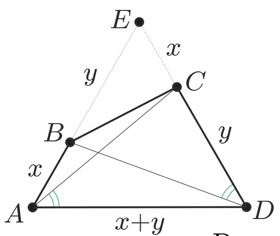

Рис. 1:

$\triangle AEC=\triangle DAB$ следует, что $BE=y$, $EC=x$. Откуда следует, что $AD=x+y$. Условие существования вписанной окружности в четырёхугольник $ABCD$ принимает вид: $AB+CD=BC+AD$, что равносильно $x+y=BC+x+y$. Выполнения которого невозможно в силу того, что $BC>0$.

Равенство $BC=\sqrt{x^2+y^2-xy}$ вытекает из теоремы косинусов в треугольнике BEC или $BC=\sqrt{(x+y)^2-3xy}$. Поскольку

$$\frac{xy}{(x+y)^2}\leqslant\frac{xy}{(2\sqrt{xy})^2}\leqslant\frac{1}{4},$$

то

$$\frac{BC}{AD}=\sqrt{1-3\frac{xy}{(x+y)^2}}\geqslant\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Причём равенство достигается при $x=y$.

Ответ: (а) нет, (б) $\frac{1}{2}$. Ответ к варианту: *2–2*: (а) нет, (б) $\frac{1}{2}$.

5. На приведенном чертеже изображена схема движения участников описываемых событий: По условию задачи, $BC=1$, обозначим $CD=a$, $DE=b$, $EF=c$, $BK:KA=\lambda$.

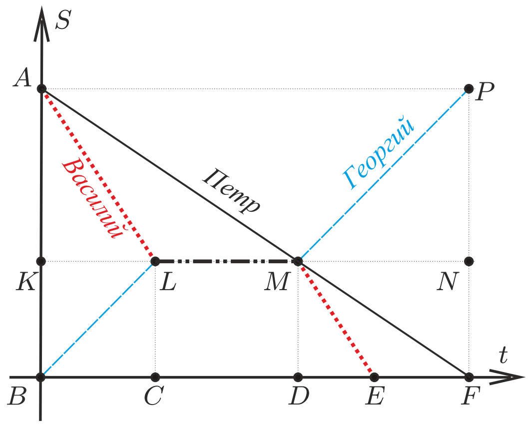

Рис. 2:

Рассматривая три пары подобных треугольников: BLC и MPN, FME и MAL, EMD и LAK, имеем

$$\lambda=\frac{1}{b+c}=\frac{c}{a}=\frac{b}{1}\quad\Rightarrow\quad b=\lambda,\ c=\frac{1}{\lambda}-\lambda,\ a=\frac{1}{\lambda^2}-1.$$

Задействуя оставшуюся информацию, получаем неравенства $\frac{1}{\lambda^2}-1\geqslant\frac{5}{4}$, $\lambda+\frac{1}{\lambda^2}\leqslant\frac{35}{12}$. Первое из них дает $\lambda\leqslant\frac{2}{3}$, второе можно решать честно, а можно заметить, что $f(\lambda)=\lambda+\frac{1}{\lambda^2}$ убывает на $(0,2/3]$, $f(2/3)=35/12$, поэтому $\lambda=2/3$. Стало быть, время в пути Петра и Георгия составило $a+b+c+1=\frac{\lambda+1}{\lambda^2}=\frac{15}{4}$.

Ответ: $12:45$. Ответ к варианту: *2–2*: $13:00$.

март 2019 г.

**Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант 4–1 (Нижний Новгород)

1. Все 11-классники спецшколы разделены на три отдельные категории: физики, химики и биологи. На каждых двоих биологов приходится 5 человек, считающихся физиками или химиками, а на каждых троих физиков приходится 7 человек, считающихся химиками или биологами. Найдите количество химиков, если 11-классников в школе не более 100.

2. Решите неравенство $\sqrt{2}\cos 2x \geqslant \sin x - \cos x$.

3. Найдите все возможные значения величины

$$T = \frac{f(t) - f(0)}{f\left(t^2\right) + f\left(t\right) - 2f\left(0\right) + 2},$$

если $f\left(2x + y\right) - f\left(x + y\right) = 2x$ для всех действительных значений x и y.

4. В равнобедренном треугольнике ABC на высоте BH, равной основанию AC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая боковую сторону BC в точке F. Каково отношение площади треугольника FCH к площади треугольника ABC? Какая часть площади треугольника ABC находится внутри окружности?

5. Решите уравнение

$$x^2 + 8\left\{x + 4\right\} - 9 = 0,$$

где $\{a\}$ – дробная часть числа a.

март 2019 г.

**Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант 4–2 (Нижний Новгород)

1. Все 11-классники спецшколы разделены на три отдельные категории: экономисты, историки и филологи. На каждых двоих филологов приходится 3 человека, считающихся экономистами или историками, а на каждых пятерых экономистов приходится 7 человек, считающихся историками или филологами. Найдите количество историков, если 11-классников в школе не более 100.

2. Решите неравенство $\sqrt{2}\cos 2x + \sin x + \cos x \leqslant 0$.

3. Найдите все возможные значения величины

$$Z = \frac{2\left(f(z) - f(0)\right)}{f\left(z^2\right) + f\left(z\right) - 2f\left(0\right) + 2},$$

если $f\left(2x - y\right) - f\left(x - y\right) = 2x$ для всех действительных значений x и y.

4. В равнобедренном треугольнике ABC на высоте BH, которая в полтора раза больше основания AC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая боковую сторону BC в точке F. Каково отношение площади треугольника FCH к площади треугольника ABC? Какая часть площади треугольника ABC находится внутри окружности?

5. Решите уравнение

$$x^2 + 8\left\{4 - x\right\} - 9 = 0,$$

где $\{a\}$ – дробная часть числа a.

март 2019 г.

Ответы и решения к варианту 4–1 (2)

1. Пусть x, y, z — количество учеников в категории: биологии, физики, химии. Тогда по условию задачи получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x = 2(y+z), \\ 7z = 3(x+y). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 2z, \\ 3x + 3y = 7z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21x = 20z, \\ 21y = 29z. \end{cases}$$

Это значит, что минимальные значения могут быть только: $x = 20$, $y = 29$, $z = 21$.

Ответ: 29. Ответ к варианту: *4–2*: 11.

2. Справедливо

$$\sqrt{2}\cos 2x \geqslant \sin x - \cos x \Longleftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sqrt{2}(\cos x + \sin x) + 1) \geqslant 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\cos x - \sin x)(2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1) \geqslant 0.$$

Решением уравнения $(\cos x - \sin x)(2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1) = 0$ являются точки $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $\frac{11\pi}{12} + 2\pi n$. Отметив эти точки на тригонометрической окружности и применив метод интервалов, получаем ответ
Ответ: $\left[-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right]$.

Ответ к варианту: *4–2*: $\left[\frac{5\pi}{12} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{13\pi}{12} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right]$.

3. Из $f(2x+y) - f(x+y) = 2x$ при $y = -x$ следует $f(x) - f(0) = 2x$, то есть $f(x) = 2x + c$. Проверка показывает, что эта функция удовлетворяет уравнению при всех значениях c.

Поэтому $T = \frac{2t+c-c}{2t^2+c+2t+c-2c+2} = \frac{t}{t^2+t+1}$. Если $t = 0$, то $T = 0$. Если $t \neq 0$, то $T = \frac{1}{t+1+\frac{1}{t}}$. Так как $\left|t + \frac{1}{t}\right| \geqslant 2$, то $T \in \left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

Ответ: $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$. Ответ к варианту: *4–2*: $\left[-2; \frac{2}{3}\right]$.

4. Введем обозначения: $BH = 2a$, $HC = a$, $BF = y$, $FC = x$. Поскольку угол BFH — прямой, то по теореме об соотношениях в прямоугольном треугольнике для двух катетов BH, HC будем иметь:

$$\begin{cases} a^2 = x(y+x), \\ 4a^2 = y(x+y). \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = 4 \Rightarrow y = 4x.$$

Из отношения площадей треугольников с общим углом находим ответ на первый вопрос:

$$\frac{S_{FCH}}{S_{ABC}} = \frac{x}{2(x+y)} = \frac{1}{10}.$$

По теореме Пифагора для треугольника BHC найдем x: $5a^2 = 25x^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{5}}$. Пусть O — центр окружности описанной вокруг $\triangle BHF$. Обозначим $\delta = \angle HOF$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BOF:

$$\left(\frac{4a}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2a^2 + 2a^2\cos\delta \Rightarrow \cos\delta = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\delta = \frac{4}{5}.$$

Обозначим площадь сектора HOF через S_1. Тогда $S_1 = \frac{1}{2}a^2 \cdot \arcsin\frac{4}{5}$. Внутри окружности у треугольника два таких сектора. Кроме того, внутри окружности два треугольника одинаковой площади. Найдем площадь S_2 треугольника BOF: $S_2 = \frac{1}{2}a^2\sin\delta = \frac{2}{5}a^2$. Тогда ответ на второй вопрос будет следующий: $\frac{2(S_1+S_2)}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right)$.

Ответ: $\frac{1}{10}$; $\frac{2(S_1+S_2)}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right)$. Ответ к варианту: *4–2*: $\frac{1}{20}$; $\frac{3}{4}\left(\arcsin\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\right)$.

5. Переписав левую часть уравнения

$$x^2 + 8\{x+4\} - 9 = x^2 + 8(x + 4 - [x+4]) - 9 = (x+4)^2 - 8[x+4] + 7,$$

(здесь $[a]$ — целая часть числа a) и сделав замену переменной $t = x + 4$, получаем уравнение

$$t^2 - 8[t] + 7 = 0.$$

Пусть $n = [t] \Rightarrow t^2 + 7 = 8n \Rightarrow n \geqslant 1$, а так как $n \leqslant t < n+1$, то $t \geqslant 1$. Далее

$$n^2 + 7 \leqslant t^2 + 7 < (n+1)^2 + 7 = n^2 + 2n + 8.$$

Значит

$$n^2 + 7 \leqslant 8n < n^2 + 2n + 8.$$

Решая эту систему неравенств, получаем $n = 1, 5, 6, 7 \Rightarrow t = 1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7$.

Ответ: -3, $+3$, $\sqrt{33}-4$, $\sqrt{41}-4$. Ответ к варианту: *4–2*: -3, $+3$, $4-\sqrt{33}$, $4-\sqrt{41}$.

март 2019 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–1** (Уфа)*

1. Сумма шести первых членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, в 344 раза больше суммы трёх её первых членов. Найдите знаменатель прогрессии.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y\sqrt{2}}+\dfrac{1}{x\sqrt{2}-y}=1, \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2}+y}-\dfrac{1}{x+y\sqrt{2}}=-1. \end{cases}$$

3. Решите неравенство $\arcsin(\sin|x|)\geqslant\arccos|\cos 2x|$.

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB=BC=3\sqrt{2}$ и $AC=2\sqrt{6}$. Высота пирамиды равна $\sqrt{6}$ и видна из вершин A и C под одним и тем же углом, равным $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Под каким углом она видна из вершины B?

5. Для каждого значения a решите уравнение

$$\left|x-2^{\frac{1}{\sin^2(2a)}}\right|+\left|x-2^{-4\,\mathrm{tg}(3a)}\right|+a\left(a+\frac{\pi}{12}\right)^2\left(a-\frac{\pi}{12}\right)=0.$$

март 2019 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–2** (Уфа)*

1. Сумма пяти первых членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, в 244 раза меньше суммы десяти её первых членов. Найдите знаменатель прогрессии.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y\sqrt{3}}+\dfrac{1}{x\sqrt{3}-y}=2, \\ \dfrac{1}{x\sqrt{3}+y}-\dfrac{1}{x+y\sqrt{3}}=-2. \end{cases}$$

3. Решите неравенство $\arcsin(\sin|x|)\geqslant\arccos|\cos 3x|$.

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB=BC=5\sqrt{2}$ и $AC=2\sqrt{10}$. Высота пирамиды равна $\sqrt{10}$ и видна из вершин A и C под одним и тем же углом, равным $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$. Под каким углом она видна из вершины B?

5. Для каждого значения a решите уравнение

$$\left|x+2^{\frac{1}{\sin^2(2a)}}\right|+\left|x+2^{4\,\mathrm{tg}(3a)}\right|+a\left(a-\frac{\pi}{12}\right)^2\left(a+\frac{\pi}{12}\right)=0.$$

март 2019 г.

Ответы и решения к варианту ***5–1****(2)*

1. Пусть $b > 0$ и $q > 0$ — первый член и знаменатель прогрессии соответственно. Заметим, что случай $q = 1$ не подходит. Если $b > 0$ и $q > 0$ (при этом $q \neq 1$), то из условия задачи имеем

$$b\frac{q^6-1}{q-1} = 344 \cdot b\frac{q^3-1}{q-1} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} q^6 - 344q^3 + 343 = 0, \\ q \neq 1, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; q^3 = 343,$$

откуда получаем $q = 7$.

Ответ: 7. Ответ к варианту: *5–2*: 3.

2. Преобразуем каждое уравнение, приводя дроби к общему знаменателю. Получим

$$\begin{cases} (\sqrt{2}+1)(x-y) = \sqrt{2}(x^2+y^2) - 3xy, \\ (\sqrt{2}-1)(x-y) = \sqrt{2}(x^2+y^2) + 3xy, \end{cases}$$

если $x \neq \pm\sqrt{2}y$ и $y \neq \pm\sqrt{2}x$. Складывая и вычитая эти уравнения, находим

$$\begin{cases} x - y = x^2 + y^2, \\ y - x = 3xy. \end{cases}$$

Следовательно, $x^2 + 3xy + y^2 = 0$, откуда либо $x = y = 0$ (этот вариант не подходит ввиду выписанных выше условий), либо $y = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}x \neq 0$. Тогда из второго уравнения находим $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \cdot 3x^2 = \frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}x$, поэтому $x = \frac{-5\pm\sqrt{5}}{3\cdot(-3\pm\sqrt{5})} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{6}$, и тогда $y = \frac{-5\pm\sqrt{5}}{6}$ соответственно (здесь знаки берутся либо верхнии, либо нижнии).

Ответ: $(x,y) = ((5+\sqrt{5})/6, (-5+\sqrt{5})/6)$; $((5-\sqrt{5})/6, (-5-\sqrt{5})/6)$. Ответ к варианту: *5–2*: $(x,y) = ((3+\sqrt{3})/8, (-3+\sqrt{3})/8)$; $(x,y) = (3-\sqrt{3})/8, (-3-\sqrt{3})/8)$.

3. Функции в левой и правой частях неравенства четные, кроме того, на множестве $[0;+\infty)$ они периодичные с периодом 2π. Поэтому достаточно решить неравенство на промежутке $[0;2\pi)$. Имеем

$$x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow x \geqslant 2x \Rightarrow x = 0; \quad x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x \geqslant \pi - 2x \Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right];$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow \pi - x \geqslant 2x - \pi \Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right];$$

$$x \in \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right] \Rightarrow \pi - x \geqslant 2\pi - 2x \Rightarrow x = \pi.$$

Если же $x \in (\pi;2\pi)$, то $\arcsin(\sin|x|) < 0$, $\arccos|\cos 2x| \geqslant 0$, поэтому на этом интервале данное неравенство решений не имеет. Четно-периодично продолжая полученные решения на всю числовую ось, получаем

Ответ: $x \in \{\pm\pi k\} \bigcup \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right] \bigcup \left[-\frac{2\pi}{3} - 2\pi k; -\frac{\pi}{3} - 2\pi k\right]$, $k = 0,1,2,\ldots$ Ответ к варианту: *5–2*:
$x \in \{\pm\pi k\} \bigcup \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right] \bigcup \left[-\frac{3\pi}{4} - 2\pi k; -\frac{\pi}{4} - 2\pi k\right]$, $k = 0,1,2,\ldots$

4. Поскольку высота SH пирамиды видна из вершин A и C под одним и тем же углом, точка H лежит на медиане (она же биссектриса и высота) BM треугольника ABC или её продолжении. Если $SH = h$, $AB = BC = a$, $AC = b$ и $\angle SAH = \angle SCH = \alpha$, а искомый угол $\angle SBH = \beta$, то имеем

$$BH = h\operatorname{ctg}\beta = BM \pm MH = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \pm \sqrt{h^2\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{b^2}{4}},$$

откуда, подставляя данные задачи, получаем $\operatorname{ctg}\beta = \sqrt{2} \pm 1$, в зависимости от того, лежит ли точка H внутри треугольника ABC или вне него. Значит, $\beta = \frac{\pi}{8}$ или $\beta = \frac{3\pi}{8}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{8}$ или $\dfrac{3\pi}{8}$. Ответ к варианту: *5–2*: $\dfrac{\pi}{12}$ или $\dfrac{5\pi}{12}$.

5. Решение может существовать только если $a \in \left\{-\frac{\pi}{12}\right\} \cup \left(0;\frac{\pi}{12}\right]$, поскольку иначе левая часть уравнения или не определена, или строго положительна. При $a = -\frac{\pi}{12}$ уравнение имеет вид $2|x-16| = 0$. Следовательно, при $a = -\frac{\pi}{12}$ $x = 16$. Если $a \in \left(0;\frac{\pi}{12}\right]$, то $2^{\frac{1}{\sin^2(2a)}} > 16$, а $2^{-4\operatorname{tg}(3a)} < 1$. Поэтому минимум функции $f(x) = \left|x - 2^{\frac{1}{\sin^2(2a)}}\right| + \left|x - 2^{-4\operatorname{tg}(3a)}\right|$ не меньше 15. С другой стороны абсолютное значение выражения $g(a) = a\left(a+\frac{\pi}{12}\right)^2\left(a-\frac{\pi}{12}\right)$ на полуинтервале $\left(0;\frac{\pi}{12}\right]$ заведомо не больше 1: $|g(a)| < a\left(a+\frac{\pi}{12}\right)^3 < 1$. Поэтому при $a \in \left(0;\frac{\pi}{12}\right]$ решений нет.

Ответ: $x = 16$ при $a = -\frac{\pi}{12}$. При остальных a решений нет. Ответ к варианту *5–2*: $x = -16$ при $a = \frac{\pi}{12}$. При остальных a решений нет.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–1** (Нижний Новгород)*

1. Найдите десятичную запись числа

$$\frac{(2x-x^2)\cdot 10^6}{33}+\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}\right),$$

если $x=0,9999$.

2. Числа $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{13}$ являются членами арифметической прогрессии с возрастающими номерами. Каково наибольшее значение разности этой прогрессии?

3. При всех значениях $a\in\mathbb{R}$ решите неравенство

$$\arccos\Big(\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big)+(x-a)^2\leqslant 2\operatorname{arctg}x.$$

4. В треугольнике ABC, $\angle A=2\alpha$, биссектрисы BD и CE пересекаются в точке I. Найдите наименьший возможный радиус окружности, описанной около треугольника DEI, если сумма длин отрезков DI и EI равна $2d$.

5. При каких значениях $n=1,2,\ldots,9$ уравнение

$$\left(\log_2^2\sin\left(\pi x+\frac{7\pi n}{6}\right)+\log_2\sin\left(\pi x+\frac{7\pi n}{6}\right)+0,5\right)\cdot$$
$$\cdot\log_2\left(9\cdot 3^{4x^2-6x}-2\cdot 3^{2x^2-3x+2}+17\right)=3\log_2\sin\left(\pi x+\frac{7\pi n}{6}\right)+1,5$$

имеет решение?

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–2** (Нижний Новгород)*

1. Найдите десятичную запись числа

$$\frac{(2x-x^2)\cdot 10^5}{666}+2\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}\right),$$

если $x=0,999$.

2. Числа $\frac{1}{21}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{17}$ являются членами арифметической прогрессии с возрастающими номерами. Каково наибольшее значение разности этой прогрессии?

3. При всех значениях $a\in\mathbb{R}$ решите неравенство

$$\arccos\Big(\frac{1-x^2}{1+x^2}\Big)+(a-x-1)^2\leqslant 2\operatorname{arctg}x.$$

4. В треугольнике ABC, $\angle B=2\beta$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке J. Найдите наименьший возможный радиус окружности, описанной около треугольника DEJ, если произведение длин отрезков DJ и EJ равна d^2.

5. При каких значениях $n=1,2,\ldots,9$ уравнение

$$\left(\log_2^2\cos\left(\pi x+\frac{7\pi n}{3}\right)+\log_2\cos\left(\pi x+\frac{7\pi n}{3}\right)+0,5\right)\cdot$$
$$\cdot\log_2\left(3^{4x^2-2x}-2\cdot 3^{2x^2-x+1}+17\right)=3\log_2\cos\left(\pi x+\frac{7\pi n}{3}\right)+1,5$$

имеет решение?

март 2019 г.

*Ответы и решения к варианту **6–1**(2)*

1. Так как $x = 1 - 10^{-4}$, то $2x - x^2 = x(2-x) = (1-10^{-4})(1+10^{-4}) = 1 - 10^{-8} = 0,99999999$. Поэтому $\frac{(2x-x^2)\cdot 10^6}{33} = \frac{999999{,}99}{33} = 30303{,}03$.

Обозначим второе слагаемое $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}\right) = y$. Так как

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3\left(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}\right) = \frac{\left(2+3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{3}$$
$$= \frac{2\sqrt[3]{2}+3\cdot 2+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2-3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1}{3} = 1,$$

то $y = 1$.

Ответ: 30304,03.

2. Пусть $a_1 = \frac{1}{17}$, $a_{n+1} = \frac{1}{15} + dn$, $a_{m+1} = \frac{1}{15} + dm$, d — разность прогрессии. Тогда

$$\begin{cases} nd = \frac{1}{15} - \frac{1}{17} = \frac{2}{15\cdot 17}, \\ md = \frac{1}{13} - \frac{1}{15} = \frac{2}{13\cdot 15} \end{cases} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{13}{17} \Leftrightarrow 17n = 13m.$$

Наибольшее значение разности – это наименьшие номера n и m. Значит $n = 13 \Leftrightarrow d = \frac{2}{13\cdot 15\cdot 17}$.

Ответ: $\frac{2}{13\cdot 15\cdot 17}$.

3. При $x < 0$ решений нет, т.к. функция справа отрицательна, а слева неотрицательна. При $x \geqslant 0$ имеем $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{arctg} x$, поэтому исходное неравенство равносильно

$$(x-a)^2 \leqslant 0.$$

Откуда $x = a$ и при $a \geqslant 0$ есть одно решение $x = a$.

Ответ: При $a < 0$ решений нет, при $a \geqslant 0$ есть одно решение $x = a$.

4. Обозначим EI за x, DI за y, ED за w. Заметим, что $\angle EAD = 2\alpha, \angle DIE = \angle BIC = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Из неравенства о среднем арифметическом и геометрическом, получаем: $4xy \leqslant (x+y)^2 = 4d^2$, причём равенство достигается в случае $x = y$. Поэтому справедливо $xy \in (0; d^2]$, то, что xy стремится к нулю, понятно из того, что один из углов $\angle B$ либо $\angle C$ можно устремить к нулю. По теореме косинусов в треугольнике EID, получаем

$$w^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cdot\cos(\pi/2+\alpha) = (x+y)^2 - 2xy(1+\cos(\pi/2+\alpha)) =$$
$$= 4d^2 - 2xy(1+\cos(\pi/2+\alpha)) \in [2d^2(1-\cos(\pi/2+\alpha)); 4d^2).$$

Остаётся заметить, что по теореме синусов в треугольнике EID, имеем $R = \frac{w}{2\sin(\pi/2+\alpha)}$.

Таким образом R может принимать значения $R \in [\frac{d\cdot\sqrt{2(1-\cos(\pi/2+\alpha))}}{2\sin(\pi/2+\alpha)}; \frac{d}{\sin(\pi/2+\alpha)})$.

Ответ: $R = \frac{d\cdot\sqrt{2(1-\cos(\pi/2+\alpha))}}{2\sin(\pi/2+\alpha)}$.

5. Сделаем замену переменных:

$$3^{2x^2-3x+1} = u, \ \alpha = \pi x + \frac{7\pi n}{6}.$$

Уравнение можно преобразовать к виду:

$$\log_2(u^2 - 6u + 17) = \frac{6(2\log_2\sin\alpha + 1)}{(2\log_2\sin\alpha+1)^2+1}.$$

Теперь введем переменную t: $t = 2\log_2\sin\alpha + 1$. Тогда правая часть уравнения может выть преобразована к виду:

$$g(t) = \frac{6t}{t^2+1}.$$

Функция $g(t)$ при отрицательных значениях аргумента отрицательна, а при положительных ее можно представить в виде:

$$g(t) = \frac{6}{t+\frac{1}{t}},$$

из которого ясно, что функция принимает максимальное значение, когда знаменатель положителен и минимален. Это произойдет при $t = 1$, то есть при $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. При этом максимальное значение правой части уравнения будет равно 3. Левая часть уравнения

$$f(u) = \log_2(u^2 - 6u + 17) = \log_2((u-3)^2 + 8) \geqslant 3$$

всегда больше или равна 3 и достигает минимального значения при $u = 3$. Отсюда можно найти значения переменной x:

$$3^{2x^2-3x+1} = 3 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \cup x = \frac{3}{2},$$

которые претендуют на то, чтобы быть корнями исходного уравнения. Значения переменной x у левой и правой части должны совпадать, поэтому решения будут при таких значениях n, при которых выполнится хотя бы одно из условий:

$$\pi\cdot 0 + \frac{7\pi n}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ или } \pi\cdot\frac{3}{2} + \frac{7\pi n}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

В обоих случаях получаются линейные диофантовы уравнения, которые решаются представлением k через классы делимости на 7 с остатком $k = 7l + r$, $(r = 0, \ldots, 6)$. Первое из этих уравнений относительно переменной n сводится к уравнению $n = \frac{3+12k}{7}$, которое на заданном промежутке натуральных чисел имеет единственное решение $n = 9$. Второе уравнение сводится к уравнению: $n = \frac{12k-6}{7}$, которое имеет единственное решение $n = 6$.

Ответ: $\{6, 9\}$.

*Ответы к варианту **6-2***

1. 152,15.

2. $\frac{2}{17\cdot 19\cdot 21}$.

3. При $a < 1$ решений нет, при $a \geqslant 1$ есть одно решение $x = a - 1$.

4. $R = \frac{d\cdot\sqrt{2(1-\cos(\pi/2+\beta))}}{2\sin(\pi/2+\beta)}$.

5. $\{3, 9\}$.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7 – 1*** (Москва)

1. Стороны прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами, при этом гипотенуза на 1 длиннее одного из катетов. Может ли длина какого-то катета данного треугольника быть равна: а) 2019; б) 2018; в) 2112?

2. Аня выписала одно за другим 2018 чисел $\frac{1\cdot 2}{2}$, $\frac{2\cdot 3}{2}$, $\frac{3\cdot 4}{2}$, ..., $\frac{2018\cdot 2019}{2}$ и вычислила их. Сколько из получившихся чисел имеют в десятичной записи последнюю цифру 5?

3. Кривая на координатной плоскости задана уравнением

$$(|x|-5)^2+(y-4)^2=\left(2-\frac{|x|}{x}\right)^2.$$

Среди всех прямых, касающихся этой кривой в двух точках, найдите ту прямую, которая наименее удалена от точки с координатами $\left(10-4\sqrt{6};\ 6\right)$.

4. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = 3$, $AD = 4$, $AC = 6$, а площадь треугольника ABC равна площади треугольника ADC и в два раза больше площади треугольника ABD.

5. Определите значение функции

$$f(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

в точке $x = 2018$, если $f(2019) = f(2023) = 0$, $f(2020) = f(2022) = 3$, $f(2021) = 4$.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7 – 2*** (Москва)

1. Стороны прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами, при этом гипотенуза на 1 длиннее одного из катетов. Может ли длина какого-то катета данного треугольника быть равна: а) 2022; б) 2021; в) 1984?

2. Петя выписал одно за другим 2019 чисел $\frac{1\cdot 2}{2}$, $\frac{2\cdot 3}{2}$, $\frac{3\cdot 4}{2}$, ..., $\frac{2018\cdot 2019}{2}$ и вычислил их. Сколько из получившихся чисел имеют в десятичной записи последнюю цифру 8?

3. Кривая на координатной плоскости задана уравнением

$$(x-8)^2+(|y|-10)^2=\left(3-\frac{2\,|y|}{y}\right)^2.$$

Среди всех прямых, касающихся этой кривой в двух точках, найдите ту прямую, которая наименее удалена от точки с координатами $\left(11;\ 15-6\sqrt{6}\right)$.

4. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $KLMN$, в котором $KL = 3$, $KN = 5$, $KM = 6$, а площадь треугольника KLM равна площади треугольника KMN и в два раза больше площади треугольника KLN.

5. Определите значение функции

$$f(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

в точке $x = 2018$, если $f(2019) = f(2023) = 0$, $f(2020) = f(2022) = -3$, $f(2021) = -4$.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7 – 3*** (Москва)

1. Стороны прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами, при этом гипотенуза на 1 длиннее одного из катетов. Может ли длина какого-то катета данного треугольника быть равна: а) 2017; б) 2020; в) 2112?

2. Таня выписала одно за другим 2018 чисел $\frac{1\cdot 2}{2}$, $\frac{2\cdot 3}{2}$, $\frac{3\cdot 4}{2}$, ..., $\frac{2018\cdot 2019}{2}$ и вычислила их. Сколько из получившихся чисел имеют в десятичной записи последнюю цифру 1?

3. Кривая на координатной плоскости задана уравнением

$$(|x|-5)^2+(y+4)^2=\left(2+\frac{|x|}{x}\right)^2.$$

Среди всех прямых, касающихся этой кривой в двух точках, найдите ту прямую, которая наименее удалена от точки с координатами $\left(4\sqrt{6}-10;\ -2\right)$.

4. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB=2$, $AD=3$, $AC=4$, а площадь треугольника ABC равна площади треугольника ADC и в два раза больше площади треугольника ABD.

5. Определите значение функции

$$f(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

в точке $x=2023$, если $f(2018)=f(2022)=0$, $f(2019)=f(2021)=3$, $f(2020)=4$.

март 2019 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7 – 4*** (Москва)

1. Стороны прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами, при этом гипотенуза на 1 длиннее одного из катетов. Может ли длина какого-то катета данного треугольника быть равна: а) 2020; б) 2021; в) 1984?

2. Вася выписал одно за другим 2019 чисел $\frac{1\cdot 2}{2}$, $\frac{2\cdot 3}{2}$, $\frac{3\cdot 4}{2}$, ..., $\frac{2018\cdot 2019}{2}$ и вычислил их. Сколько из получившихся чисел имеют в десятичной записи последнюю цифру 3?

3. Кривая на координатной плоскости задана уравнением

$$(x+8)^2+(|y|-10)^2=\left(3+\frac{2\,|y|}{y}\right)^2.$$

Среди всех прямых, касающихся этой кривой в двух точках, найдите ту прямую, которая наименее удалена от точки с координатами $\left(-5;\ 6\sqrt{6}-15\right)$.

4. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $KLMN$, в котором $KL=3$, $KN=2$, $KM=6$, а площадь треугольника KLM равна площади треугольника KMN и в два раза больше площади треугольника KLN.

5. Определите значение функции

$$f(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

в точке $x=2023$, если $f(2018)=f(2022)=0$, $f(2019)=f(2021)=-3$, $f(2020)=-4$.

март 2019 г.

*Ответы и решения к варианту **7–1***

1. Пусть катеты прямоугольного треугольника равны x и y, а гипотенуза равна $x+1$. По теореме Пифагора $(x+1)^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow 2x+1 = y^2$, откуда y – нечетное число, а $2x+1$ – полный квадрат. Поэтому:

а) 2019. x не может равняться 2019, так как $2\cdot 2019+1 = 4039$ не является полным квадратом. Если $y = 2019$, то $x = \frac{2019^2-1}{2} \in \mathbb{N}$. Следовательно, один из катетов может равняться 2019.

б) 2018. x не может равняться 2018, так как $2\cdot 2018+1 = 4037$ не является полным квадратом. Но и y не может равняться 2018, так как y обязательно нечетное.

в) 2112. y не может равняться 2112, так как y обязательно нечетное. Если $x = 2112$, то $y^2 = 2\cdot 2112+1 = 4225$, откуда $y = 65$. Следовательно, один из катетов может равняться 2112.

Ответ: да; нет; да. Ответ к варианту: *7–2*: нет; да; да. *7–3*: да; нет; да. *7–4*: нет; да; да.

2. Поскольку $\frac{(n+20)\cdot(n+21)}{2} - \frac{n\cdot(n+1)}{2} = 20n+210$ делится на 10, то числа $\frac{(n+20)\cdot(n+21)}{2}$ и $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ заканчиваются на одну и ту же цифру, то есть последовательность последних цифр данных в условии чисел периодическая с периодом $T = 20$. Если выписать первые 20 чисел, то их последние цифры равны: 1, 3, 6, 0, 5, 1, 8, 6, 5, 5, 6, 8, 1, 5, 0, 6, 3, 1, 0, 0. Таким образом, 20 это наименьший период.

На этом периоде цифра 5 встречается 4 раза. Значит, всего она встретится $\left[\frac{2018}{20}\right]\cdot 4+4 = 404$ раза.

Ответ: 404. Ответ к варианту: *7–2*: 202. *7–3*: 404. *7–4*: 202.

3. При $x > 0$ уравнение равносильно $(x-5)^2+(y-4)^2 = 1^2$, а при $x < 0$ равносильно $(x+5)^2+(y-4)^2 = 3^2$. Таким образом, исходная кривая состоит из двух окружностей. Она показана на рисунке, там же изображены возможные прямые, имеющие две точки касания с кривой.

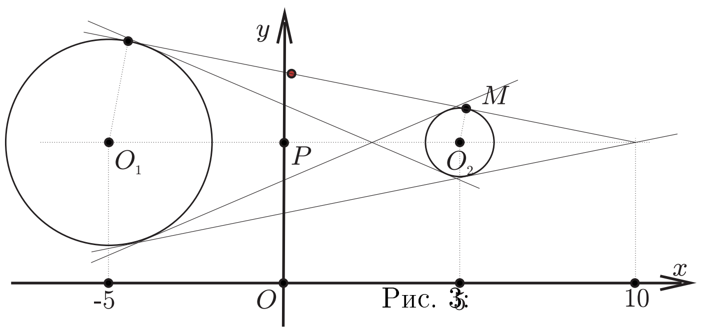

Рис. 3:

Из подобия треугольников вытекает, что $O_2K = 5$. Следовательно, $MK = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Поэтому уравнения внешних касательных будут: $y = -\frac{x-10}{2\sqrt{6}}+4$ и $y = \frac{x-10}{2\sqrt{6}}+4$. Поскольку первая прямая проходит через точку $\left(10-4\sqrt{6};\, 6\right)$, то именно она и будет доставлять минимальное расстояние. Для справки уравнения двух внутренних касательных: $y = -\frac{2x-5}{\sqrt{21}}+4$, $y = \frac{2x-5}{\sqrt{21}}+4$.

Ответ: $y = -\frac{x-10}{2\sqrt{6}}+4$. Ответ к варианту: *7–2*: $y = -2\sqrt{6}\,(x-8)+15$. *7–3*: $y = \frac{x+10}{2\sqrt{6}}-4$. *7–4*: $y = 2\sqrt{6}\,(x+8)-15$.

4. Так как площади треугольников ABC и ADC равны, то точки B и D равноудалены от прямой AC, то есть точка пересечения диагоналей четырехугольника O делит BD пополам. Из условия $S_{ABC} = 2S_{ABD}$ следует $s + S_{BOC} = 2\cdot 2s$ (где s – площадь каждого из равновеликих треугольников ABO и AOD). Отсюда $S_{BOC} = 3s$, то есть $OC : AO = 3 : 1$. Если теперь обозначить точку пересечения медиан треугольника BCD через Q, то получается $OQ = \frac{QC}{2}$ и $OQ = AO$, то есть $ABQD$ – параллелограмм. Тогда $S_{ABD} = S_{AQD} = 2\sqrt{5}$ (в ΔAQD нам известны все стороны: 3, 3 и 4). Площадь четырехугольника в 4 раза больше.

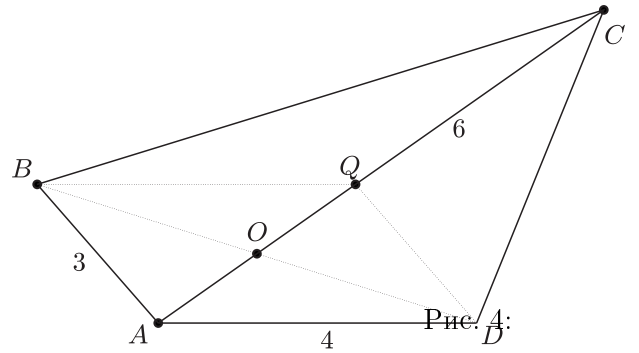

Рис. 4:

Ответ: $8\sqrt{5}$. Ответ к варианту: *7–2*: $5\sqrt{11}$. *7–3*: $3\sqrt{7}$. *7–4*: $8\sqrt{2}$.

5. Введем функцию $g(x) = f(x) + (x-2021)^2 - 4$. Для нее выполняются условия $g(2019) = g(2020) = g(2021) = g(2022) = g(2023) = 0$, то есть функция $g(x)$ имеет 5 корней. Так как она является многочленом 5-й степени, то других корней у нее нет. Значит,

$$g(x) = (x-2019)(x-2020)(x-2021)(x-2022)(x-2023)\,,$$

и

$$f(x) = (x-2019)(x-2020)(x-2021)(x-2022)(x-2023) - (x-2021)^2 + 4.$$

Поэтому

$$f(2018) = (-1)(-2)(-3)(-4)(-5) - (-3)^2 + 4 = -120 - 9 + 4 = -125.$$

Ответ: -125. Ответ к варианту: *7–2*: -115. *7–3*: 115. *7–4*: 125.

март 2019 г.