ПВГ 2017

9 класс

1. На гранях куба написаны шесть натуральных чисел (возможно, повторяющиеся), такие, что числа на соседних гранях отличаются более чем на 1. Каково наименьшее возможное значение суммы этих шести чисел?
   Ответ: 18.
   Решение: Рассмотрим три грани, имеющие общую вершину. Числа на них попарно отличаются на 2, поэтому, наименьшая возможная сумма будет для 1+3+5=9. То же можно сказать про оставшиеся три грани.

2. На факультете Слизерин учится 30 человек. Некоторые дружат (дружба взаимна), но нет 3 человек, которые попарно дружили бы друг с другом. На Новый год каждый отправил открытки всем своим друзьям. Какое наибольшее количество открыток могло быть отправлено?
   Ответ: 450.
   Решение: Найдем человека, у которого больше всего друзей. Предположим, что их не менее 15 и обозначим их количество как 15+a. Разобьем учащихся на две группы: в первую войдут эти 15+a учащихся. По условию они не могут дружить между собой, поэтому каждый из них имеет не более 15-a друзей. Во вторую группу войдут оставшиеся 15-a, они имеют не более 15+a друзей каждый. Таким образом, каждая из групп отправит не более 225-a^2 открыток. Следовательно, всего будет отправлено не более 450-2a^2, что не превосходит 450.
   Заметим, что эта величина достижима. Разобьем учащихся на две группы по 15 человек и пусть каждый представитель одной из групп дружит со всеми представителями другой группы.

3. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными $\sqrt{2}$.
   Найдите прямолинейный разрез наименьшей длины, который делит площадь треугольника пополам.
   В ответе укажите длину разреза, округленную до 2 десятичных цифр после запятой.
   Ответ: 0,91.
   Решение: Пусть в треугольнике *ABC* угол *B* – прямой. Разрез пересекает две стороны треугольника в точках *P* и *Q*.
   Предположим сначала, что эти точки расположены на катетах. Обозначим x=BP, y=BQ.
   Тогда $\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}S(ABC) = \frac{1}{2}$, а $PQ^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$. Очевидно, наименьшая длина $PQ = \sqrt{2} \approx 1.41$.
   Пусть теперь точки *P,Q* расположены на катете *AB* и гипотенузе *AC*, соответственно. Обозначим *AP=x, AQ=y*. Тогда $\frac{\sqrt{2}}{4}xy = \frac{1}{2}$, т.е. $xy = \sqrt{2}$. По теореме косинусов $PQ^2 = x^2 + y^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}xy = x^2 + \frac{2}{x^2} - 2 = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{x}\right) + 2\sqrt{2} - 2$.
   Наименьшее значение $PQ = \sqrt{2\sqrt{2} - 2} \approx 0.91$

4. Дана последовательность натуральных чисел a_n, члены которой удовлетворяет соотношениям $a_{n+1} = k \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}$ (при $n \geq 2$). Все члены последовательности – целые числа.

Известно, что $a_1 = 1$, и $a_{2018} = 2020$. Найдите наименьшее натуральное k, при котором это возможно.

Ответ: 2020

Решение: Пусть a2=x. Тогда все члены последовательности будут иметь вид $x^m k^n$.

Степени k будут повторяться с периодом 6: 0, 0, 1,2,2,1,0,0,…

Степени x тоже будут повторяться с периодом 6: 0,1,1,0,-1,-1,0,1,…

Поскольку 2018 дает остаток 2 при делении на 6, то $a_{2018} = a_2 = x = 2020$. Чтобы все члены последовательности были целыми необходимо чтобы k было кратно x, наименьшее такое k равно 2020.

5. Найдите наибольшее возможное значение выражения $xy(x-y)$, при условии, что $x, y \in [0; 1]$.

   Ответ: 0.25.

   Решение: Рассмотрим $xy(x-y) = -xy^2 + x^2 y$, как квадратичную функцию от *y*. Ее максимум достигается в вершине соответствующей параболы $y_0 = \frac{x}{2}$. Очевидно, она расположена на указанном отрезке. Подставив в выражение получим $-x{y_0}^2 + x^2 y_0 = \frac{x^3}{4}$ Очевидно, наибольшее значение равно $\frac{1}{4}$.

6. Точки $A_1, \ldots, A_{12}$ являются вершинами правильного 12-угольника. Сколько существует различных 11-звенных незамкнутых ломаных без самопересечений с вершинами в этих точках. Ломаные, переходящие друг в друга при повороте считаются за одну.

   Ответ: 1024.

   Решение: Первую вершину ломаной можно выбрать 12 способами. Каждую следующую (кроме последней) можно выбрать двумя способами – она должна быть соседней с уже отмеченными вершинами, чтобы не было самопересечений. Последняя вершина выбирается однозначно. Получаем $12*2^{10}$ способов. Учитывая 12 возможных поворотов, получаем, что каждая ломаная будет посчитана 12 раз, поэтому это число надо разделить на 12.

   Замечание : Тут в условии подразумевалось, что у ломаной есть начальная и конечная точки. Если же рассматривать ломаные как геометрические объекты, т.е. не имеющие выделенной «головы» и «хвоста», то это существенно усложняет задачу.

7. Найдите наименьшее трехзначное число обладающее свойством: если к нему приписать справа число, большее на 1, то результат (шестизначное число) будет точным квадратом.

   Ответ: 183

   Решение: обозначим искомое число a, тогда $1000a+a+1 = n^2$. Запишем в виде: 1001a=(n-1)(n+1). Разложим 1001 = 7x11x13, т.е. произведение (n-1)(n+1) должно делиться на 7, 11 и 13. Кроме того, чтобы квадрат был шестизначным числом, *n* должно быть на отрезке [317;999].

   Рассмотрим следующие варианты:

   а) n-1 кратно 143, n+1 кратно 7, тогда находим n = 573;

   б) n-1 кратно 7, n+1 кратно 143, тогда n=428;

   в) n-1 кратно 77, n+1 кратно 13, тогда n =155 – не подходит;

   г) n-1 кратно 13, n+1 кратно 77, тогда n=846

   д) n-1 кратно 91, n+1 кратно 11, тогда n = 274 – не подходит;

   е) n-1 кратно 11, n+1 кратно 91, тогда n=727.

   Наименьшее n=428, $n^2=428^2 = 183184$.

8. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{16x+4}$. В ответе укажите корень, если он один и сумму корней, если их несколько.

Ответ:1,25

Решение: Обозначим $a=\sqrt[3]{x+2},\ b=\ \sqrt[3]{3x-1}$.

Тогда $a+b=\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}$. Возводя обе части в куб, получим $(a+b)^3=4(a^3+b^3)$. Перенесем в одну сторону и разложим на множители $(a+b)(a-b)^2=0$.

Следовательно либо a+b=0, тогда x+2=1-3x, откуда x=-0,25, либо a-b=0, тогда x+2=3x-1, т.е. x=1,5.