Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10–11 классы. Заключительный этап 2017/2018 учебного года.

Вариант 1

1. Найдите такое наименьшее натуральное число, что его половина есть пятая степень некоторого целого числа, а пятая часть есть квадрат некоторого целого числа.

2. Найдите сумму $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, если известно, что три различных действительных числа x, y и z удовлетворяют условиям:

$$x^3+1009=2018x, \qquad y^3+1009=2018y, \qquad z^3+1009=2018z.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}}-3^{2\sqrt{y}}\geq 2\sqrt{y}-\sqrt{x}, \\ x^2+y^2\leq 9+2xy. \end{cases}$$

4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2-1}{2^3-1}+\operatorname{arctg}\frac{3-1}{3^3-1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{100-1}{100^3-1}\right)$.

5. Развертка боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной 12, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

Март 2018 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10–11 классы. Заключительный этап 2017/2018 учебного года.

Вариант 2

1. Найдите такое наименьшее натуральное число, что его треть есть пятая степень некоторого целого числа, а пятая часть есть куб некоторого целого числа.

2. Найдите сумму $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$, если известно, что три различных действительных числа *x*, *y* и *z* удовлетворяют условиям:

$$x^3+1009=2018x^2, \qquad y^3+1009=2018y^2, \qquad z^3+1009=2018z^2.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}}-3^{2\sqrt{y}}\le 2\sqrt{y}-\sqrt{x}, \\ x^2-16+y^2\le 0. \end{cases}$$

4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2+1}{2^3+1}+\operatorname{arctg}\frac{3+1}{3^3+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{100+1}{100^3+1}\right)$.

5. Развертка боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной 10, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом $\frac{4\pi}{5}$. Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

Март 2018 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10–11 классы. Заключительный этап 2017/2018 учебного года.

Вариант 3

1. Найдите такое наименьшее натуральное число, что его треть есть квадрат некоторого целого числа, а половина есть куб некоторого целого числа.

2. Найдите сумму $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, если известно, что три различных действительных числа x, y и z удовлетворяют условиям:

$$x^3 = 2016x + 1008, \qquad y^3 = 2016y + 1008, \qquad z^3 = 2016z + 1008.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{-x}} - 2^{\sqrt{-3y}} \geq \sqrt{-3y} - \sqrt{-x}, \\ x^2 + 2xy \leq 16 - y^2. \end{cases}$$

4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2-1}{2^3-1} + \operatorname{arctg}\frac{3-1}{3^3-1} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{101-1}{101^3-1}\right)$.

5. Развертка боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной 6, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

Март 2018 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 10–11 классы. Заключительный этап 2017/2018 учебного года.

Вариант 4

1. Найдите такое наименьшее натуральное число, что его половина есть седьмая степень некоторого целого числа, а седьмая часть есть квадрат некоторого целого числа.

2. Найдите сумму $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$, если известно, что три различных действительных числа x, y и z удовлетворяют условиям:

$$x^3+2016x^2=1008,\qquad y^3+2016y^2=1008,\qquad z^3+2016z^2=1008.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{-x}}-2^{\sqrt{-3y}}\geq\sqrt{-3y}-\sqrt{-x}, \\ x^2-9+y^2\leq 0. \end{cases}$$

4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2+1}{2^3+1}+\operatorname{arctg}\frac{3+1}{3^3+1}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{101+1}{101^3+1}\right)$.

5. Развертка боковой поверхности усеченного конуса с образующей, равной 20, представляет собой часть кругового кольца с центральным углом $\frac{4\pi}{5}$.

Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если площадь его поверхности равна площади полного кругового кольца.

Март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **1–1** (Саратов)*

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{3x^2-12x+13}\leqslant 4x-x^2-2.$$

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\arcsin(2x)+\arccos(2x)\geqslant \frac{\pi}{4}\cdot(y^2-2).$$

3. Найдите наименьшее натуральное число q, для которого существует такое целое число p, что уравнение $x^4+px^2+q=0$ имеет четыре корня, образующие арифметическую прогрессию.

4. В треугольник ABC, в котором сумма сторон AC и BC в $9/5$ раз больше стороны AB, вписана окружность, касающаяся сторон BC, AC и AB в точках M, N и K соответственно. Отношение площади треугольника MNC к площади треугольника ABC равно r. Найдите при данных условиях:

а) наименьшее значение r;

б) все возможные значения r.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$16^x-6\cdot 8^x+8\cdot 4^x+(2-2a)2^x-a^2+2a-1=0$$

имеет ровно три различных корня.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **1–2** (Саратов)*

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{2x^2+4x+3}\leqslant 2-2x-x^2.$$

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\arcsin(3x)+\arccos(3x)\geqslant \frac{\pi}{6}\cdot(y^2-6).$$

3. Найдите наименьшее натуральное число q, для которого существует такое целое число p, что уравнение $x^4+2px^2+q=0$ имеет четыре корня, образующие арифметическую прогрессию.

4. В треугольник ABC, в котором сумма сторон AC и BC в $15/7$ раз больше стороны AB, вписана окружность, касающаяся сторон BC, AC и AB в точках M, N и K соответственно. Отношение площади треугольника MNC к площади треугольника ABC равно s. Найдите при данных условиях:

а) наименьшее значение s;

б) все возможные значения s.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$81^x-6\cdot 27^x+8\cdot 9^x+2(1+a)3^x-2a-a^2-1=0$$

имеет ровно три различных корня?

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **2–1** (Кемерово)*

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}-2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x^2+14x+40}-4}.$$

2. Число в семеричной системе счисления является трехзначным. В системе счисления с основанием 11 оно записывается теми же тремя цифрами, но в обратном порядке. Какова его запись в десятичной системе счисления (найдите все возможные значения)?

3. Решите уравнение

$$6\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x + 5\operatorname{ctg} 3x = 0.$$

4. В окружности радиуса $5\sqrt{2}$ проведены взаимно перпендикулярные хорды, которые точкой пересечения делятся в отношении $6:1$ и $2:3$. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма длин промежутков, составляющих множество (возможно пустое) решений неравенства

$$\log_2(x^2+4ax+4a^2-a) < 2,$$

меньше 2.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **2–2** (Кемерово)*

1. Решите неравенство

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+16x+55}-4} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}-2}.$$

2. Число в девятеричной системе счисления является трехзначным. В семеричной системе счисления оно записывается теми же тремя цифрами, но в обратном порядке. Какова его запись в десятичной системе счисления (найдите все возможные значения)?

3. Решите уравнение

$$3\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 2x + 2\operatorname{tg} 3x = 0.$$

4. В окружность радиуса $3\sqrt{11}$ вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения в отношении $4:3$ и $6:1$. Найдите расстояние от этой точки до центра окружности.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма длин промежутков, составляющих множество (возможно пустое) решений неравенства

$$\log_4(x^2-6ax+9a^2+a) < 1,$$

меньше 2.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–1** (Челябинск)*

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}-3} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}.$$

2. Незнайка собирается приготовить ко дню своего рождения три бочки малинового морса, смешивая малину с водой, причем процентное содержание малины в бочках будет таково, что если смешать содержимое бочек в пропорции $1:2:3$, то получится 10% морс, а если в пропорции $5:4:3$, то получится 25% морс. Каким будет процентное содержание малины в морсе при смешивании равных количеств исходных трех растворов? Каким планируется содержание малины в третьей бочке?

3. Найдите площадь треугольника ABC, в котором $AB = 4$, $AC = 5$ и $\cos(\angle B - \angle C) = 11/16$.

4. Для функции $f(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}$ найдите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right) + f\left(\frac{1}{2017}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2017) + f(2018).$$

5. Найдите наименьшее значение $|x-y|$ при условии

$$(\cos^4 x + 1)(4\cos^4 y + 1) = 8\cos^3 x \cos^2 y, \quad x \in [\pi; 2\pi], \quad y \in [\pi/2; 3\pi/2].$$

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–2** (Челябинск)*

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-4} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x+2}-3}.$$

2. Незнайка собирается приготовить ко дню своего рождения три бочки малинового морса, смешивая малину с водой, причем процентное содержание малины в бочках будет таково, что если смешать содержимое бочек в пропорции $6:5:4$, то получится 30%-й морс, а если в пропорции $2:3:4$, то малины получится в 5 раз меньше, чем воды. Каким будет процентное содержание малины в морсе при смешивании равных количеств исходных трех растворов? Каким планируется содержание малины во второй бочке?

3. Найдите площадь треугольника ABC, в котором $AB = 4$, $AC = 5$ и $\cos(\angle B - \angle C) = 7/8$.

4. Для функции $f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$ найдите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right) + f\left(\frac{1}{2017}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2017) + f(2018).$$

5. Найдите наибольшее значение $|x-y|$ при условии

$$(4\cos^4 x + 1)(\cos^4 y + 1) = 8\cos^2 x \cos^3 y, \quad x \in [0; \pi], \quad y \in [3\pi/2; 5\pi/2].$$

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***4–1*** *(Уфа)*

1. Решите уравнение

$$\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{4}{5}\right)\cdot x+\pi=2\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

2. Однажды два друга вложили деньги в общее дело: каждый вложил свою сумму, а вместе — 1 млн руб. За ночь один из них вложил в то же дело дополнительную сумму. Сколько всего денег он вложил в итоге, если его новая доля в общем деле оказалась в 7 раз больше прежней, тогда как доля другого — в 3 раза меньше прежней?

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{ctg}^2 x\leqslant 2\cos^3 3x.$$

4. Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $\angle ABD=\angle CBD=40^\circ$, $\angle ACD=20^\circ$, $\angle CAD=30^\circ$. Найдите:

а) углы $\angle BAD$ и $\angle BCD$;

б) расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, если $BC=3$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a4^{\frac{1}{x}-1}+(a-1)2^{\frac{1}{x}}-a^3+3a-2=0$$

не имеет корней.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***4–2*** *(Уфа)*

1. Решите уравнение

$$2\operatorname{arctg}5+\operatorname{arctg}\frac{5}{12}=\left(\arcsin\frac{4}{5}-\arccos\frac{3}{5}\right)\cdot x+\pi.$$

2. Однажды два друга вложили деньги в общее дело: каждый вложил свою сумму, а вместе — 1 млн руб. За ночь один из них вложил в то же дело дополнительную сумму. Сколько всего денег он вложил в итоге, если его новая доля в общем деле оказалась в 4 раза больше прежней, тогда как доля другого — в 4 раза меньше прежней?

3. Решите неравенство

$$3\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 x\leqslant 2\sin^3 3x.$$

4. Внутри треугольника KLM взята такая точка N, что $\angle MKN=\angle LKN=50^\circ$, $\angle MLN=10^\circ$, $\angle LMN=30^\circ$. Найдите:

а) углы $\angle KLN$ и $\angle KMN$;

б) расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников KLM и KLN, если $KL=\sqrt{3}$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a+1)4^{\frac{1}{x}+2}+a2^{\frac{1}{x}+3}-a^3-3a^2=0$$

имеет хотя бы один корень.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–1** (Железноводск)*

1. Решите уравнение
$$\lg\left(-x^3-x\right)=\log_2|x|\,.$$

2. На выборах кандидат получил от $50,332\%$ до $50,333\%$ голосов. Какое при этом могло быть наименьшее число избирателей?

3. Решите уравнение
$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2017}+\sqrt{x+2018}}=42.$$

4. Прямая, проходящая через точки, симметричные основанию высоты AD остроугольного треугольника ABC относительно сторон AC и AB, пересекает эти стороны в точках E и F, соответственно. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения отрезков BE и CF, если $AC=b$ и $\angle ABC=\beta$.

5. Найдите все значения a, при каждом их которых неравенство
$$(x+\log_4|a|)(x+\log_{|a|}4)(x^2+10\cdot 2^a x+a^2-3)\geqslant 0$$
выполняется для любого x.

март 2018 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–2** (Железноводск)*

1. Решите уравнение
$$\log_{30}\left|x^3+x\right|=\log_3(-x).$$

2. На выборах кандидат получил от $50,439\%$ до $50,44\%$ голосов. Какое при этом могло быть наименьшее число избирателей?

3. Решите уравнение
$$\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2018}+\sqrt{x+2019}}=42.$$

4. Прямая, проходящая через точки, симметричные основанию высоты AD остроугольного треугольника ABC относительно сторон AC и AB, пересекает эти стороны в точках E и F соответственно. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения отрезков BE и CF, если $AB=c$ и $\angle ACB=\gamma$.

5. Найдите все значения a, при каждом их которых неравенство
$$(x-\log_4|a|)(x-\log_{|a|}4)(x^2-10\cdot 2^{-a} x+a^2-3)\geqslant 0$$
выполняется для любого x.

март 2018 г.