

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы»

Задания для 5-6 классов

Вариант 3b (Москва)

1. Манго и апельсин в сумме стоят столько же, сколько 12 яблок. При этом манго стоит на 80% дороже чем апельсин и яблоко. Во сколько раз манго дороже яблока?

Ответ: 8.36.

Решение:

$$M+A = 12Я$$

$$M = 1.8(A+Я)$$

Умножим первое равенство на 1.8 и прибавим второе, получим $2.8 M = 23.4 Я$, откуда $M = 8.36 Я$.

2. Каждый работник на стройке владеет по крайней мере одной строительной специальностью. 10 человек владеют специальностью каменщика, 9 – специальностью маляра, 8 – специальностью штукатура. Известно, что по крайней мере четверо владеют специальностями каменщика и штукатура одновременно, по крайней мере пятеро – специальностями каменщика и маляра и по крайней мере трое – маляра и штукатура? Какое наибольшее количество работников может быть на стройке при этих условиях?

Ответ 18.

Решение: см. 8 класс.

3. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 122-м месте?

Ответ: 40001.

Решение: см. 9 класс.

4. Школьный тренер решил наградить 12 школьников, которые пробежали дистанцию за лучшее время. Каждого из них надо наградить «золотой», «серебряной» или «бронзовой» медалью. Надо использовать все три типа медалей, причем того, кто пришел к финишу раньше нельзя награждать менее ценной медалью, чем того, кто пришел позже.

Сколькими способами тренер может распределить медали (время у всех бегунов разное)?

Ответ: $C_{11}^2 = 55$.

Решение: см. 9 класс.

5. На прямой расположены 16 точек A_1, \dots, A_{16} , идущие с промежутками 1 см. Миша строит окружности по следующим правилам:

- a) Окружности не пересекаются и не касаются.
- b) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, \dots, A_{16} .
- c) Ни одна из этих точек не лежит на окружности
- d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Миша сможет построить по этим правилам?

Ответ: 31.

Решение: см. 9 класс.

Задания для 7-8 классов

Вариант 3в (Москва)

1. Каждый работник на стройке владеет по крайней мере одной строительной специальностью. 10 человек владеют специальностью каменщика, 9 – специальностью маляра, 8 – специальностью штукатура. Известно, что по крайней мере четверо владеют специальностями каменщика и штукатура одновременно, по крайней мере пятеро – специальностями каменщика и маляра и по крайней мере трое – маляра и штукатура? Какое наибольшее количество работников может быть на стройке при этих условиях?

Ответ 18.

Решение: По формуле включений-исключений общее количество работников равно $K+M+Ш - KM-КШ-МШ + KMШ=10+9+8-4-5-3 + KMШ = 15 + KMШ$. Заметим, что количество рабочих, владеющих всеми тремя специальностями не может превышать 3.

2. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 122-м месте?

Ответ: 40001.

Решение: см. 9 класс.

3. Школьный тренер решил наградить 12 школьников, которые пробежали дистанцию за лучшее время. Каждого из них надо наградить «золотой», «серебряной» или «бронзовой» медалью. Надо использовать все три типа медалей (хотя бы по одному разу), причем того, кто пришел к финишу раньше нельзя награждать менее ценной медалью, чем того, кто пришел позже.

Сколькими способами тренер может распределить медали (время у всех бегунов разное)?

Ответ: $C_{11}^2 = 55$.

Решение: см. 9 класс.

4. На прямой расположены 16 точек A_1, \dots, A_{16} , идущие с промежутками 1 см. Миша строит окружности по следующим правилам:

а) Окружности не пересекаются и не касаются.

б) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, \dots, A_{16} .

с) Ни одна из этих точек не лежит на окружности

д) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Миша сможет построить по этим правилам?

Ответ: 31.

Решение: см. 9 класс.

5. Назовем число X «50-подпирающим», если для любых 50 действительных чисел a_1, \dots, a_{50} , сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 50-подпирающее X , округленное до сотых по стандартным математическим правилам.

Ответ: 0.

Решение: см. 9 класс.

6. Последовательность a_n задана следующим образом:

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}, \text{ при } n \geq 1. \text{ Найдите } a_{999}.$$

Ответ: 999000.

Решение: см. 9 класс.

Задания для 9 класса

Вариант 3в (Москва)

1. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 122-м месте?

Ответ: 40001.

Решение: Подсчитаем количество таких чисел для различного количества разрядов.

Пусть n – число разрядов. Вычтем из старшего разряда 1, получим число (которое может теперь начинаться с нуля), сумма цифр которого равна 4. Представим это следующим образом – есть 4 шара, между которыми ставят $n-1$ перегородку. Выбрать это можно C_{n+3}^4 способами.

Составим таблицу:

Число разрядов	Количество способов
1	$C_4^4 = 1$
2	$C_5^4 = 5$
3	$C_6^4 = 15$
4	$C_7^4 = 35$
5	$C_8^4 = 70$
ИТОГО	126

Очевидно, что 126-е число – наибольшее 5-значное – будет 50000.

Значит, на 125 месте стоит – 41000.

на 124 – 40100

на 123 – 40010

на 122 – 40001

2. Школьный тренер решил наградить 12 школьников, которые пробежали дистанцию за лучшее время. Каждого из них надо наградить «золотой», «серебряной» или «бронзовой» медалью. Надо использовать все три типа медалей, причем того, кто пришел к финишу раньше нельзя награждать менее ценной медалью, чем того, кто пришел позже.

Сколькими способами тренер может распределить медали (время у всех бегунов разное)?

Ответ : $C_{11}^2 = 55$.

Решение: Эта задача эквивалентна разбиению числа 12 на три натуральных слагаемых.
Количество таких способов : $C_{11}^2 = 55$.

3. На прямой расположены 16 точек A_1, \dots, A_{16} , идущие с промежутками 1см. Миша строит окружности по следующим правилам:

- a) Окружности не пересекаются и не касаются.
- b) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, \dots, A_{16} .
- c) Ни одна из этих точек не лежит на окружности
- d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри, построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Миша сможет построить по этим правилам?

Ответ: 31.

Решение: Можно представить такую систему окружностей в виде дерева с 16 листьями.

В таком дереве не может быть более 31 узла. Легко построить бинарное дерево, в котором узлов ровно 31.

4. Назовем число X «50-подпирающим», если для любых 50 действительных чисел a_1, \dots, a_{50} , сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 50-подпирающее X , округленное до сотых по стандартным математическим правилам.

Ответ: 0.

Решение: Можно взять все 25 чисел, равными $\frac{1}{2}$.

5. Последовательность a_n задана следующим образом:

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}, \text{ при } n \geq 1. \text{ Найдите } a_{999}.$$

Ответ: 999000.

Решение: Рассмотрим начало последовательности: $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 20, \dots$

Можно заметить закономерность – разница между соседними членами образует арифметическую прогрессию: 4, 6, 8,

Отсюда получим формулу для n -го члена $a_n = n \cdot (n + 1)$, которую можно доказать по индукции.

Значит $a_{999} = 999 \cdot 1000 = 999000$.

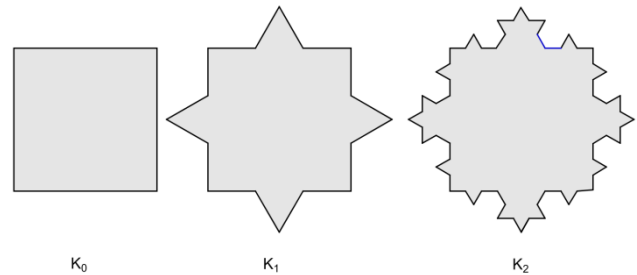
б. Назовем «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником (см. рис.):

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть K_0 – квадрат со стороной 2.5, K_1 – многоугольник, полученный путем зазубривания K_0 , K_2 – получен зазубриванием K_1, \dots, K_{2018} получен зазубриванием K_{2017} (см. рис.). Найдите площадь $S(K_{2018})$. Ответ округлите до сотых по стандартным математическим правилам.



Ответ: 28.33.

Решение: На каждом шаге количество сторон увеличивается в 4 раза. Поэтому на $n-1$ -м шаге получается 4^n –угольник. При этом длина стороны уменьшается в 3 раза, поэтому на $n-1$ -м шаге сторона равна $\frac{5}{2} \cdot 3^{1-n}$. Таким образом, на n -м шаге добавляется 4^n правильных треугольников, сторона каждого из которых равна $\frac{5}{2} \cdot 3^{1-n}$. Следовательно площадь на n -м шаге увеличивается на

$$4^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{5}{2} \cdot 3^{1-n} \right)^2 = \frac{255\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n$$

Начальная площадь $S_0 = \frac{25}{4}$, следовательно $S_{2018} = \frac{25}{4} + \frac{255\sqrt{3}}{16} \left(\left(\frac{4}{9} \right) + \left(\frac{4}{9} \right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9} \right)^{2018} \right) \approx \frac{25}{4} + \frac{51\sqrt{3}}{4} \approx 28.33$

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы»

Задания для 5-6 классов

Вариант 1а (Кемерово)

1. В школьном буфете пирожок и бутерброд вместе стоят столько же, сколько стоят 7 стаканов чая. А пирожок стоит на 40% меньше, чем бутерброд и стакан чая. Во сколько раз пирожок дороже стакана чая?

Ответ: в 3 раза.

2. В кружок робототехники берут только тех, кто знает математику, физику или программирование. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 – математику, 11 – программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих – математику и программирование, и не менее четырех – физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?

Ответ 19.

3. Назовем натуральное число «примечательным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите количество примечательных чисел, не превосходящих 950.

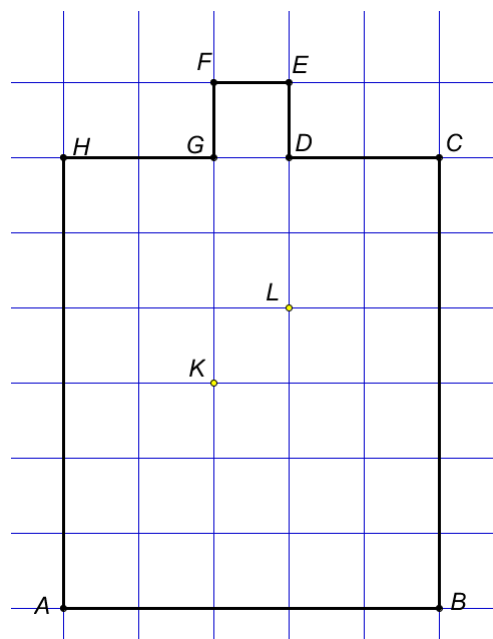
Ответ: 38.

4. Из последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$ удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2018 месте среди оставшихся?

Ответ: 2063.

5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см построен многоугольник $ABCDEFGH$ (см.рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L , не выходящую за границу $ABCDEFGH$ (по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.

Ответ: 42.



Вариант 2а (Уфа)

1. Тетрадь и линейка (в сумме) стоят в 8 раз больше, чем один карандаш? При этом тетрадь стоит на 25% больше, чем линейка и карандаш. Во сколько раз тетрадь дороже карандаша?

Ответ 5.

2. В музыкальном кружке каждый из участников умеет играть по крайней мере на одном музыкальном инструменте. 8 человек играют на фортепиано, 9 на саксофоне и 11 – на гитаре? Известно, что по крайней мере три человека играют на фортепиано и на гитаре, по крайней мере четверо – на гитаре и саксофоне и по крайней мере один человек – на фортепиано и саксофоне. Какое наибольшее количество участников может быть в кружке при этих условиях?

Ответ 22.

3. Назовем натуральное число «занимательным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите количество Занимательных чисел, не превосходящих 980.

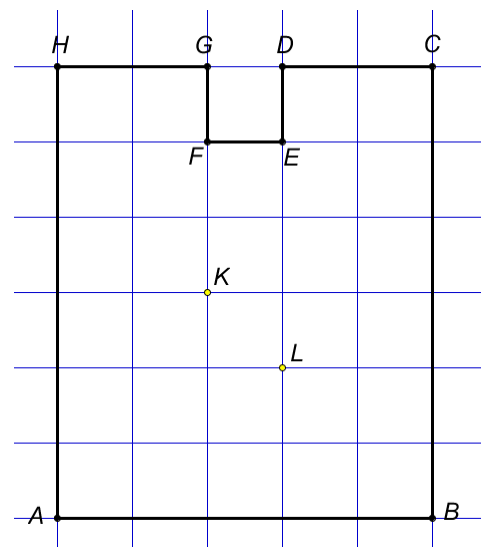
Ответ: 41.

4. Из последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$ удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2000 месте среди оставшихся?

Ответ: 2045.

5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см построен многоугольник $ABCDEFGH$ (см.рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L , не выходящую за границу $ABCDEFGH$ (по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.

Ответ 40.



Вариант 3а (Челябинск)

1. Манго и апельсин в сумме стоят столько же, сколько 12 яблок. При этом манго стоит на 80% дороже чем апельсин и яблоко. Во сколько раз манго дороже яблока?

Ответ: 9.

2. Каждый работник на стройке владеет по крайней мере одной строительной специальностью. 10 человек владеют специальностью каменщика, 9 – специальностью маляра, 8 – специальностью штукатура. Известно, что по крайней мере четверо владеют специальностями каменщика и штукатура одновременно, по крайней мере пятеро – специальностями каменщика и маляра и по крайней мере трое – маляра и штукатура? Какое наибольшее количество работников может быть на стройке при этих условиях?

Ответ 18.

3. Назовем натуральное число «примечательным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите количество примечательных чисел, не превосходящих 999.

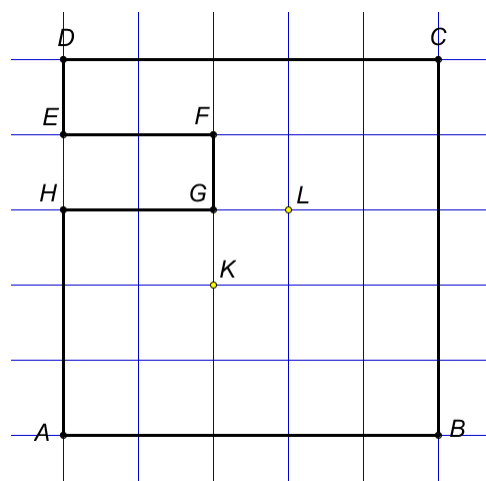
Ответ : 42.

4. Из последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$ удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2600 месте среди оставшихся?

Ответ: 2651.

5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см построен многоугольник $ABCDEFGH$ (см.рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте *прямоугольную* ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L , не выходящую за границу $ABCDEFGH$ (по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.

Ответ: 34.



Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы»

Задания для 5-6 классов

Вариант 1b (Железноводск)

1. В школьном буфете пирожок и бутерброд вместе стоят столько же, сколько стоят 7 стаканов чая. А пирожок стоит на 40% меньше, чем бутерброд и стакан чая. Во сколько раз пирожок дороже стакана чая?

Ответ: в 3 раза.

2. В кружок робототехники берут только тех, кто знает математику, физику или программирование. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 – математику, 11 – программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих – математику и программирование, и не менее четырех – физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?

Ответ 19.

3. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 111-м месте?

Ответ: 23000.

4. Тринадцать миллионеров приехали на экономический форум и поселились в отеле «Super Luxury+». В отеле есть номера 3 различных типов: 6-звездочные, 7-звездочные, и 8-звездочные. Надо расселить миллионеров, причем так, чтобы использовать все три типа номеров (т.е. хотя бы одного человека поселить в 6-звездочный номер, хотя бы одного в 7-звездочный и хотя бы одного в 8-звездочный). При этом нельзя более богатого миллионера селить в номер с меньшим количеством звездочек, чем у менее богатого.

Сколькими способами их можно расселить (состояния у всех миллионеров попарно разные)?

Ответ: $C_{12}^2=66$.

5. На прямой расположены 15 точек A_1, \dots, A_{15} , идущие с промежутками 1см. Петя строит окружности по следующим правилам:

а) Окружности не пересекаются и не касаются.

б) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, \dots, A_{15} .

с) Ни одна из этих точек не лежит на окружности

d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Петя сможет построить по этим правилам?

Ответ: 29.

Вариант 2b (Саратов)

1. Тетрадь и линейка (в сумме) стоят в 8 раз больше, чем один карандаш? При этом тетрадь стоит на 25% больше, чем линейка и карандаш. Во сколько раз тетрадь дороже карандаша?

Ответ 5.

2. В музыкальном кружке каждый из участников умеет играть по крайней мере на одном музыкальном инструменте. 8 человек играют на фортепиано, 9 на саксофоне и 11 – на гитаре? Известно, что по крайней мере три человека играют на фортепиано и на гитаре, по крайней мере четверо – на гитаре и саксофоне и по крайней мере один человек – на фортепиано и саксофоне. Какое наибольшее количество участников может быть в кружке при этих условиях?

Ответ 22.

3. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 121-м месте?

Ответ: 32000.

4. У Феокиста Аристарховича есть 14 китайских ваз династии Цин, причем никакие две не были сделаны в один год. Вазы надо распределить по трем полкам, причем на каждую полку надо поставить хотя бы одну вазу и нельзя более древнюю вазу ставить ниже, чем менее древнюю. Найдите количество таких способов расстановки, если порядок ваз на одной полке не учитывается.

Ответ: 78.

5. На прямой расположены 14 точек A_1, \dots, A_{14} , идущие с промежутками 1 см. Коля строит окружности по следующим правилам:

- Окружности не пересекаются и не касаются.
- Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, \dots, A_{14} .
- Ни одна из этих точек не лежит на окружности
- Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Коля сможет построить по этим правилам?

Ответ: 27.

Вариант 3b (Москва)

1. Манго и апельсин в сумме стоят столько же, сколько 12 яблок. При этом манго стоит на 80% дороже чем апельсин и яблоко. Во сколько раз манго дороже яблока?

Ответ: 9.

2. Каждый работник на стройке владеет по крайней мере одной строительной специальностью. 10 человек владеют специальностью каменщика, 9 – специальностью маляра, 8 – специальностью штукатура. Известно, что по крайней мере четверо владеют специальностями каменщика и штукатура одновременно, по крайней мере пятеро – специальностями каменщика и маляра и по крайней мере трое – маляра и штукатура? Какое наибольшее количество работников может быть на стройке при этих условиях?

Ответ 18.

3. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 122-м месте?

Ответ: 40001.

4. Школьный тренер решил наградить 12 школьников, которые пробежали дистанцию за лучшее время. Каждого из них надо наградить «золотой», «серебряной» или «бронзовой» медалью. Надо использовать все три типа медалей, причем того, кто пришел к финишу раньше нельзя награждать менее ценной медалью, чем того, кто пришел позже.

Сколькими способами тренер может распределить медали (время у всех бегунов разное)?

Ответ: $C_{11}^2 = 55$.

5. На прямой расположены 16 точек A_1, \dots, A_{16} , идущие с промежутками 1см. Миша строит окружности по следующим правилам:

a) Окружности не пересекаются и не касаются.

b) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, \dots, A_{16} .

c) Ни одна из этих точек не лежит на окружности

d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Миша сможет построить по этим правилам?

Ответ: 31.