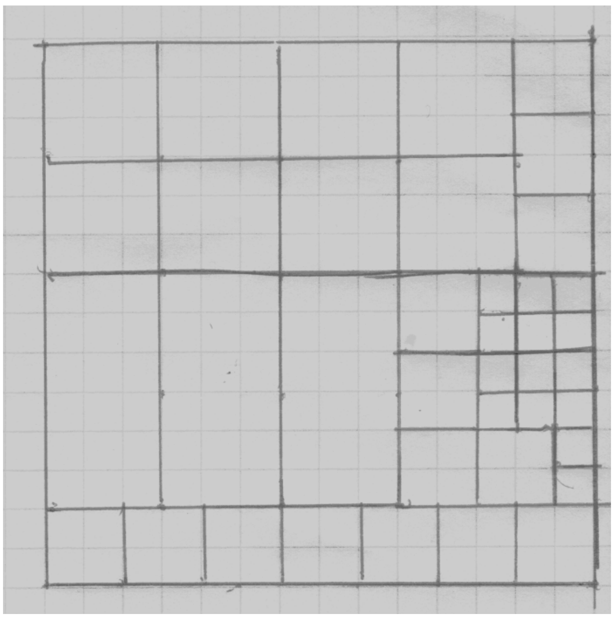
7-8 класс

Вариант 3-а

7. Даны три числа *a,b,c.* Известно, что среднее арифметическое чисел *a* и *b* на 5 больше среднего арифметического всех трех чисел. А среднее арифметическое чисел *a* и *c* на 8 меньше среднего арифметического всех трех чисел. На сколько среднее арифметическое чисел *b* и *c* отличается от среднего арифметического всех трех чисел?
   Ответ: На 3 больше.
   Решение: Среднее арифметическое от чисел $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}$, очевидно, совпадает со средним арифметическим чисел *a,b,c*. Значит, если одно $\frac{a+b}{2}$ больше на 5, а $\frac{a+c}{2}$- меньше на 8, то, чтобы результат получился такой же, надо чтобы $\frac{b+c}{2}$ было больше на 3.
8. Назовем число «замечательным», если оно имеет ровно 4 различных натуральных делителя, причем среди них найдутся два, такие, что ни один не кратен другому. Сколько существует «замечательных» двузначных чисел?
   Ответ 36.
   Решение: Такие числа обязательно имеют вид $p_1 \cdot p_2$, где p_1, p_2 - простые числа. Заметим, что меньшее из этих простых чисел не может быть больше 7, т.к. тогда произведение будет не менее 121. Достаточно перебрать $p_1 = 2,3,5,7$. Для 2 получаем второй множитель: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, или 47 - 14 вариантов, для 3 получаем : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 – 10 вариантов, для 5 - : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, - 7 вариантов и для 7: 3, 5, 7, 11, 13, - 5 вариантов. Всего 14+10+7+5 = 36 вариантов.
9. Сложить квадрат наименьшей площади из квадратиков размера 1х1, 2х2 и 3х3, так чтоб количество квадратиков каждого размера было одинаковым.

   Ответ: 

   Решение. Обозначим за n число квадратиков каждого вида. Тогда n+4n+9n=14n Должно быть квадратом целого числа. Наименьшее *n*, при котором это возможно – 14. На рис. Приведен пример, как построить такой квадрат размер 14x14 (возможны и другие варианты расположения, главное, чтобы квадратиков было по 14).

10. Фирма проводила опрос сотрудников – какими социальными сетями они пользуются: ВКонтакте или Одноклассниками. Некоторые сотрудники ответили, что используют ВКонтакте, некоторые - Одноклассников, некоторые сказали, что используют обе социальные сети, а 40 сотрудников сказали, что не пользуются соц. сетями. Среди всех, кто использует соц. сети, ВКонтакте используют 75% , а 65% – обе сети. Доля тех сотрудников , которые используют Одноклассников , от общего числа всех сотрудников равна 5/6. Сколько всего сотрудников работает в фирме?

    Ответ: 540

    Решение: Поскольку среди пользователей соц. Сетей ВКонтакте используют 75%, получается, что только Одноклассников использует 25%. Кроме того, 65% используют обе сети, значит всего Одноклассниками пользуется 65+25=90% пользователей соц. Сетей. Эти 90% составляют 5/6 сотрудников фирмы, значит 100% составляет 10/9 * 5/6 = 50/54 от всех сотрудников. Поэтому те, кто не пользуются, составляют 1-50/54 = 4/54, причем их 40 человек. Следовательно, всего сотрудников 540.

11. В правильном 2017-угольнике провели все диагонали. Петя выбирает наугад какие-то N диагоналей. При каком наименьшем N среди выбранных диагоналей гарантированно найдутся две, имеющие одинаковую длину?

    Ответ: 1008.

    Решение: Выберем произвольную вершину и рассмотрим все диагонали, выходящие из нее. Их 2014 штук, причем по длине они разбиваются на 1007 пар. Очевидно, что повернув многоугольник, любую из его диагоналей можно совместить с одной из этих. Значит, существует всего 1007 разных размеров диагоналей. Значит, выбрав 1008, Петя гарантированно получит, по крайней мере, две одинаковые.

12. Сколькими способами можно разложить число 10000 на три натуральных множителя, ни один из которых не делится на 10? Считаем, что разложения, отличающиеся только порядком сомножителей, не различаются.

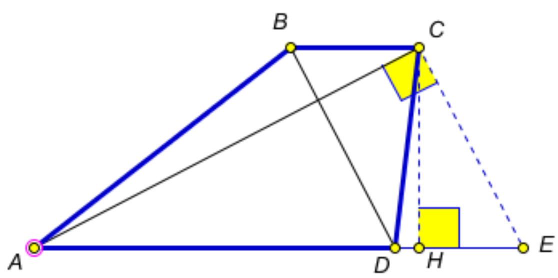
Ответ: 6.

Решение: В каждый из множителей должны входить только степени 2 и 5 (одновременно не могут, т.к. будет кратно 10). Может быть два множителя, равные степени двойки, тогда третий равен 625. Или наоборот – два множителя – степени пятерки, а третий равен 16. В каждом случае по 3 варианта.

13. В трапеции известны длины диагоналей – 6 и 8, а также длина средней линии – 5. Найдите высоту трапеции.

    Ответ. 4,8.

    Решение: Параллельно основаниям AD и BC переносим одну из диагональ BD на длину BC. Получаем треугольник *ACE* со сторонами 6,8,10, который, по обратной теореме Пифагора является прямоугольным. Записав площадь двумя способами: $S = \frac{1}{2}AC \times CE = \frac{1}{2}AE \times CH$, находим его высоту *CH*=4,8.



Вариант 3-b

1. Даны шесть чисел, среднее арифметическое которых равно некоторому числу А. Петров посчитал среднее арифметическое первых четырех чисел – оно оказалось равно А+10. Васечкин посчитал среднее арифметическое последних четырех чисел – оно равно А - 7. В какую сторону и на сколько отличается от А среднее арифметическое первого, второго, пятого и шестого из этих чисел?

   Ответ: 25,6 кг.

   Решение – аналогично варианту v3a.

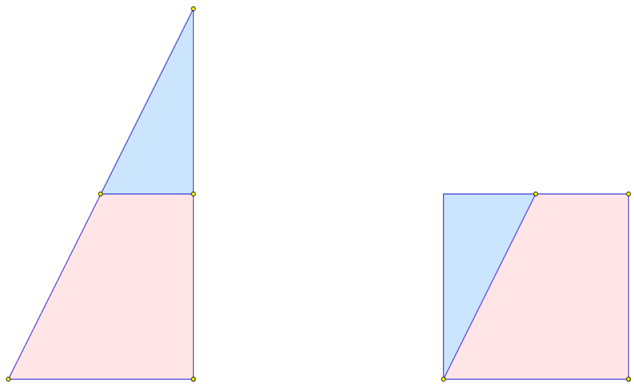
2. Назовем целое число «необыкновенным», если оно имеет ровно один четный делитель, не равный 2. Сколько существует необыкновенных чисел на отрезке [1;75]?

   Ответ:12

   Решение: Это число должно быть равно простому, умноженному на 2. Таких чисел 12:

   2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37

3. Прямоугольный треугольник разрезали по прямой на две части и сложили из них квадрат(см. рис). Чему равен меньший катет, если больший равен 10?



   Ответ 5.

   Решение: Короткий катет равен стороне квадрата, а длинный – удвоенной стороне квадарта.

4. Пиратская шхуна взяла торговое судно на абордаж. Десять пиратов не участвовали в бою, а остальные потеряли в бою либо руку, либо ногу, либо и руку и ногу одновременно. 54% участников боя потеряли руку, а 34% - руку и ногу. Известно, что 2/3 всех пиратов, бывших на шхуне потеряли ногу. Сколько пиратов находилось на шхуне?

   Ответ: 60 пиратов.

   Решение – аналогично варианту v3a.

5. В правильном 1000-угольнике провели все диагонали. Какое наибольшее количество диагоналей можно выбрать так, чтобы среди любых трех из выбранных диагоналей по крайней мере две имели одинаковую длину?

   Ответ: 2000

   Решение: Для того, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы длины диагоналей принимали не более двух различыных значений. Диагоналей, соединяющих диаметрально противоположные вершины 500. Любую другую диагональ можно поворотом наложить на диагональ соответствующей длины, т.е. их по 1000 штук. значит можно выбрать 2000 с соблюдением условия.

6. Сколькими способами можно разложить число 1024 на три натуральных множителя, так, чтобы первый множитель был кратен второму, а второй – третьему?
Ответ: 14
Решение: Заметим, что множители имеют вид $2^a \times 2^b \times 2^c$, где a+b+c=10 и $a \geq b \geq c$. Очевидно, что с меньше 4,т.к. сумма была бы больше 10. Рассмотрим случаи:

с=0) Тодга b=0,…,5, a=10-b – 6 вариантов

c=1) Тогда b = 1,..,4, a=9-b – 4 вар.

c=2) b=2,3, 4, a=8-b – 3 вар.

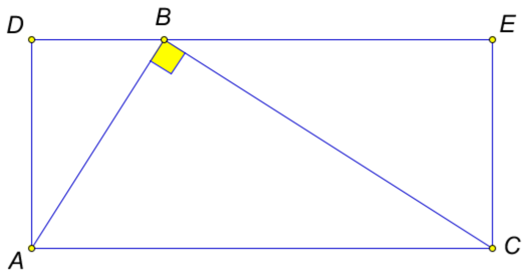
c=3) b=3, a=4 – 1 вар.

итого 6+4+3+1 = 14 вариантов.

7. В трапеции, диагонали которой пересекаются под прямым углом известно, что средняя линия равна 6,5 а одна из диагоналей равна 12. Найдите вторую диагональ
Ответ 5
Решение: Параллельно перенесем одну из диагоналей так, чтобы она образовала с другой прямоугольный треугольник. Тогда в нем один катет равен 12, а гипотенуза равна 13, следовательно, оставшийся катет равен 5.

Вариант 2-а

1. Найдите две положительные несократимые дроби со знаменателями, не превосходящими 100, сумма которых равна 86/111.
Ответ: 2/3+4/37.
Решение: 111=37*3, т.е. одна дробь должны быть со знаменателем 37, а другая – со знаменателем 3. Очевидно, что числитель второй дроби может быть 1 или 2. 1/3 не подходит, а для 2/3 получаем 4/37.
2. Найдите наименьшее n>2016, такое, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не кратно 10.



Ответ: 2020.

Решение: Степени 1 всегда оканчиваются на 1. Последняя цифра степени 2 меняются с периодом 4: 2,4,8,6. Степени 3 –тоже 3,9,7,1. Степени 4 меняются с периодом 2: 4,6,4,6. Т.е. последняя цифра будет повторяться с периодом 4. Проверив для n=1,2,3 получаем, что последняя цифра 0, а для n=4 – 4. Следовательно, наименьшее N>2016 будет 2020.

3. Около прямоугольного треугольника *ABC* с катетами *AB*=5 и *BC* =6 описали прямоугольник *ADEC*, как показано на рисунке. Какова площадь *ADEC*?

   Ответ 30.

   Решение: Площадь прямоугольника в два раза больше площади треугольника.

4. Вася придумывает 4-значный пароль для кодового замка. Он не любит цифру 2, поэтому не использует ее. Кроме того он не любит когда две одинаковые цифры стоят рядом. А еще он хочет, чтобы первая цифра совпадала с последней. Сколько вариантов надо перебрать, чтобы гарантированно угадать Васин пароль.

   Ответ: 504

   Решение: Пароль должен иметь вид ABCA, где A,B,C – разные цифры (не равные 2). Их можно выбрать 9*8*7=504 способами.

   Комментарий для проверяющих: Можно ставить половинный балл тем, кто считает, что первая цифра не равна нулю.

5. В Империи Вестероса было 1000 городов и 2017 дорог (каждая дорога соединяет какие-то два города). Из каждого города можно было проехать в каждый. Однажды злой волшебник заколдовал *N* дорог, и ездить по ним стало нельзя. Образовалось 7 королевств, так, что в каждом королевстве можно добраться из любого города в любой по дорогам, а из одного королевства в другое по дорогам добраться нельзя. При каком наибольшем *N* это возможно?

   Ответ 1024.

   Решение: Предположим, что злой волшебник заколдовал все 2017 дорог. Тогда получается 1000 королевств (каждое из одного города). Представим теперь, что добрый волшебник расколдовывает дороги так, чтобы получилось 7 королевств. Он должен расколдовать как минимум 993 дороги, т.к. каждая дорога уменьшает число королевств не более, чем на 1. Значит злой волшебник не мог заколдовать более 2017-993=1024 дорог.

   Для проверяющих: Можно засчитывать частичный балл за правильный ответ, полученный для какого-то частного случая – без общего обоснования.

6. Джеку Воробью нужно было разложить 150 пиастров по 10 кошелькам. После того, как он положил некоторое количество пиастров в первый кошелек, в каждый следующий он клал больше, чем в предыдущий. В результате оказалось, что количество пиастров в первом кошельке не меньше, чем половина количества пиастров в последнем. Сколько пиастров находится в 6-м кошельке?

   Ответ: 16

   Решение: Пусть в первом кошельке x пиастров. Тогда во втором не менее x+1, в третьем - не менее x+2. … в 10-м не менее x+9. Таки образом, с одной стороны $x + x + 1 + \cdots + x + 9 = 10x + 45 \leq 150$, Откуда $x \leq 10$. С другой стороны $x \geq (x + 9)/2$, откуда $x \geq 9$. Значит в первом лежит 9 или 10 пиастров. Но 9 не может быть, т.к . тогда в последнем не более 18 и сумма не получается 150.

Значит в 1-м 10 , во втором – не менее 11, в 3 – не менее 12, в 4 – не менее 13, в 5 – не менее 14 и в 6-м –не менее 15. Но при 15 сумма получается менее 150. Значит 16. А больше быть не может, т.к. тогда в последнем кошельке будет 21.

Для проверяющих: Можно ставить частичный балл за правильный пример раскладки (подбор) без доказательства единственности.

7. Найдите наименьшее натуральное *N*, такое, что десятичная запись числа $N\times 999$ состоит из одних семерок.

Ответ 778556334111889667445223

Решение: $N\times 999 = 77\ldots 7$, тогда N кратно 7, обозначим n=N/7. Получим $999n = 1000n - n = 11\ldots 1$, значит 1000n -111…1 = n. Запишем в виде вычитания столбиком и будем повторять найденные цифры N со сдвигом на 3 влево

```
*******000
-
1111111111
------------------
   ******889

****889000
-
1111111111
------------------
   ***777889

777889000
-
111111111
---------------------
6667778889
```

Заметим, что далее цифры повторяются по 3, получаем n=111 222 333 444 555 666 777 889.

Значит N = 7n = 778556334111889667445223.

Для проверяющих: альтернативный ход решения – взять число 111…1 и начать его делить в столбик на 999, пока не разделится нацело. Думаю, можно не снижать балл, если в самом конце число n неправильно умножили на 7.

Вариант 2-b

1. Сколько натуральных чисел от 1 до 2017 имеют ровно три различных натуральных делителя?

Ответ: 14.

Решение: Только квадраты простых чисел имеют ровно три делителя. Заметим, что $47^2 > 2017$, поэтому достаточно рассмотреть квадраты простых чисел от 2 до 43. Их 14 штук.

2. Вовочка подошел к игровому автомату , на экране которого горело число 0. В правилах игры было написано: «*На экране показано число очков. Если кинуть монетку в 1 руб., то число очков увеличится на 1. Если кинуть монетку 2 руб., то число очков удвоится. Если набрать 50 очков, то автомат выдает приз. А если получилось число, большее 50, то все набранные очки сгорают.*»
За какое минимальное количество рублей Вовочка сможет получить приз?
Ответ: 11руб.
Решение: Попробуем решить с конца – как за наименьшее количество рублей получить из 50 число 1, если можно только делить на 2 и вычитать 1. Получим: 50->25->24->12->6->3->2->1. Т.е. потребуется 4 двухрублевые и 3 рублевые монетки. Очевидно, что если использовать 3 двухрублевых и менее 5 рублевых(что соответствует умножению на 8), то не получить число, большее 40. Меньшим числом рублевых монет тоже не обойтись – можно показать перебором.

3. Петя придумывает пароль для своего смартфона. Пароль состоит из 4 десятичных цифр. Петя хочет, чтобы пароль не содержал цифру 7, при этом в пароле должны быть хотя бы две (или более) одинаковые цифры. Сколькими способами Петя может это сделать?

Ответ 3537.

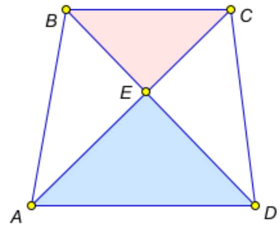
Решение: Всего паролей, не содержащих цифры 7 будет $9^4 = 6561$. При этом 9x8x7x6=3024 состоят из разных цифр. Значит содержат одинаковые цифры 6561-3024=3537 паролей.

4. В компьютерном центре стоит 200 компьютеров, некоторые из них (попарно) соединены кабелями, всего использовано 345 кабелей. Будем называть «кластером» множество компьютеров, такое, что из любого компьютера этого множества сигнал по проводам (возможно, через промежуточные компьютеры) может добраться до всех остальных. В начале все компьютеры образовывали один кластер. Но однажды ночью злой хакер перерезал несколько кабелей, так, что образовалось 8 кластеров. Найдите наибольшее возможное число кабелей, которые были перерезаны.
Ответ: 153.
Решение: Попробуем представить себе задачу так: злой хакер перерезал все провода. Какое наименьшее количество проводов должен восстановить админ, чтобы получилось 8 кластеров? Очевидно, что добавляя провод админ может уменьшать число кластеров на единицу. Значит из 200 кластеров можно получить 8 если восстановить 192 провода. Следовательно хакер мог перзать максимум 153 провода.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD||BC$ диагонали пересекаются в точке E.

   Известны площади $S(\Delta ADE) = 12$ и $S(\Delta BCE) = 3$.

   Найдите площадь трапеции.

   Ответ:27

   Решение: Треугольник ADE и CBE подобны, их площади относятся как квадрат коэффициента подобия. Следовательно, этот коэффициент равен 2. Значит, точка E делит диагонали в отношении 1:2. Поэтому площади треугольников ABE и CDE в два раза больше площади BCE и равны 6. Получаем S(ABCD)=12+3+6+6=27.

6. Написаны 2017 чисел. Известно, что сумма квадратов любых 7 из них равна 7 , сумма любых 11 из них положительна, а сумма всех 2017 чисел делится на 9. Найдите эти числа.
   Ответ: Пять чисел равны -1, остальные равны 1.
   Решения: Сумма квадратов любых 7 чисел равна 7. Отсюда следует, что все эти квадраты равны 1. Все эти числа равны +/-1. Сумма 11 положительна, значит количество -1 не превосходи 5. Если все будут равны 1, то сумма равна 2017 и на 9 не делится. Если поменять знак у одной единицы – сумма уменьшится на 2. Сделав так 5 раз получим 2007, которое делится на 9.
7. Найдите наименьшее натуральное число, оканчивающееся на цифру 2, которое удваивается, если переставить эту цифру в начало.
   Ответ: 105263157894736842
   Решение: Запишем число в виде ***…**2 и будем умножая на 2 постепенно восстанавливать «звездочки»:
   ***…**2 x 2 = ***…**4
   ***…*42 x 2 = ***…*84
   ***…*842 x 2 = ***…*684
   ***…*6842 x 2 = ***…*3684
   ***…*36842 x 2 = ***…*73684
   ***…*736842 x 2 = ***…*473684
   ***…*4736842 x 2 = ***…*9473684
   …
   105263157894736842x2=210526315789473684

Вариант 1-а

1. Часы Безумного Шляпника спешат на 15 минут в час, а часы Мартовского Зайца отстают на 10 минут в час. Однажды они поставили свои часы по часам Сони (которые остановились и всегда показывают 12-00) и договорились собраться в 5 часов вечера на традиционный

файв-о-клок. Сколько времени Безумный Шляпник будет ждать Мартовского Зайца, если каждый приходит ровно в 17-00 по своим часам?

Ответ: 2 часа.

Решение: Часы Безумного шляпника ищут со скоростью, составляющей 5/4 от обычной, поэтому 5 часов они пройдут за 4 часа обычного времени. Аналогично, часы Мартовского Зайца идут со скоростью 5/6 от обычной, поэтому 5 часов они пройдут за 6 часов.

2. На международный чемпионат по игре в StarCraft съехалось 100 участников. Игра идет на выбывание, т.е. в каждом матче участвует два игрока, проигравший выбывает из участия в чемпионате, а выигравший – остается. Найдите наибольшее возможное количество участников, которые выиграли ровно две партии?

   Ответ:49

   Решение: Каждый участник (кроме победителя) проиграл кому-то одну партию. Таких 99, значит выиграть 2 партии не могло более 49 участников (им кто-то должен проиграть 2 партии).

   Покажем, что их могло быть 49. Пусть №3 выиграл у №1 и №2, №5 – у №3 и №4,… №99 – у №97 и №98, а №100 выиграл у №99. Тогда все участники с нечетными номерами (кроме первого) выиграли ровно по 2 партии.

3. Робот движется по прямолинейным участкам, при этом совершая повороты через каждую минуту на 90 градусов направо или налево (временем на поворот пренебречь). За минуту робот проходит 10 метров. На каком минимальном расстоянии от начального положения он может оказаться через 9 мин. после начала движения, если в течение первой минуты робот не поворачивал?

   Ответ: 10м

   Решение: Можно рассмотреть координатную сетку с узлами идущими через 10м. Очевидно, робот проходит по узлам этой сетки. В исходную позицию за 9 мин. Он вернуться не может. А на расстоянии 10 м может оказаться – легко построить пример.

4. Коробка с сахаром имеет форму прямоугольного параллелепипеда. В ней находится 280 кусочков сахара, каждый из которых – кубик размером 1х1х1 см. Найдите площадь полной поверхности коробки, если известно, что длина каждой из ее сторон меньше 10см.

   Ответ:262

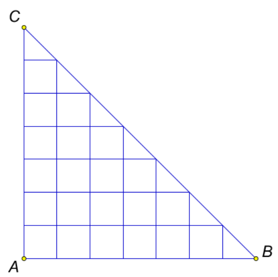
   Решение: $280=2^3$x5x7. Из условия, что длины сторон – целые числа, меньшие 10 вытекает, что ее ребра равны 5,7 и 8. Площадь поверхности 2*(5*7+5*8+7*8)=262

5. Назовем число «замечательным», если оно имеет ровно 4 различных натуральных делителя, причем среди них найдутся два, такие, что ни один не кратен другому. Сколько существует «замечательных» двузначных чисел?

   Ответ 36.

   Решение: Такие числа обязательно имеют вид $p_1 \cdot p_2$, где p_1, p_2 - простые числа. Заметим, что меньшее из этих простых чисел не может быть больше 7, т.к. тогда произведение будет не менее 121. Достаточно перебрать $p_1 = 2,3,5,7$. Для 2 получаем второй множитель: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, или 47 - 14 вариантов, для 3 получаем : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 – 10 вариантов, для 5 - : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, - 7 вариантов и для 7: 3, 5, 7, 11, 13, - 5 вариантов. Всего 14+10+7+5 = 36 вариантов.

6. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольный треугольник с катетами, равными 7 клеткам (см.рис.). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество



треугольников можно найти на этом рисунке?

Ответ: 28 треугольников

Решение: Одна из сторон треугольника должна идти под наклоном, т.е. лежать на отрезке ВС. Если зафиксировать какой-то диагональный отрезок, то оставшаяся вершина определяется однозначно. Т.е. надо выбрать две точки из 8, это можно сделать 7х8\2=28 способами.

7. Найдите все такие трёхзначные числа $\overline{\text{ПВГ}}$, состоящие из различных цифр *П*, *В* и *Г*, для которых выполняется равенство $\overline{\text{ПВГ}} = (\text{П} + \text{В} + \text{Г})\times(\text{П} + \text{В} + \text{Г} + 1)$.

   Ответ:156.

   Решение: Заметим, что П+В+Г≥ 3 и ≤ 24 (т.к. цифры разные). Кроме того числа $\overline{\text{ПВГ}}$ и $(\text{П} + \text{В} + \text{Г})$ должны давать одинаковые остатки при делении на 9. Это возможно только тогда, когда П+В+Г кратно 3. Заметим, что П+В+Г=9 – не подходит, т.к. $(\text{П} + \text{В} + \text{Г})\times(\text{П} + \text{В} + \text{Г} + 1) = 90$ –двузначное. Перебирая 12, 15,18,21, 24, получаем $\overline{\text{ПВГ}} = 156 = 12\times13$.

Вариант 1-b

1. Петины часы спешат на 5 минут в час, а Машины – отстают на 8 минут в час. В 12-00 они поставили свои часы по школьным часам (которые идут точно) и договорились в полседьмого пойти вместе на каток. Сколько времени Петя будет ждать Машу, если каждый приходит на каток ровно в 18-30 по своим часам?

   Ответ: 1,5 часа.

   Решение: Петины часы идут со скоростью, составляющей 13/12 от обычной, поэтому 6,5 часов они проходят за 6 часов реального времени. Машины часы идут со скоростью 13/15 от обычной, поэтому 6,5 часов они пройдут за 7,5 часов реального времени.

2. На международный чемпионат по настольному теннису съехалось 200 участников. Игра идет на выбывание, т.е. в каждом матче участвует два игрока, проигравший выбывает из участия в чемпионате, а выигравший – остается. Найдите наибольшее возможное количество участников, которые выиграли не менее трех партий.

   Ответ:66.

   Решение: Каждый участник (кроме победителя) проиграл кому-то одну партию. Таких 199, значит выиграть 3 партии не могло более 66 участников (им кто-то должен проиграть 3 партии).

   Покажем, что их могло быть 66. Пусть №4 выиграл у №1,2,3; №7 – у №4,5,6,… №199 – у №196,197,198, а №200 выиграл у №199. Тогда все участники с номерами дающими остаток 1 при делении на 3 (кроме первого) выиграли ровно по 3 партии.

3. Черепаха выползла из своего домика и поползла прямолинейно и равномерно со скоростью 5м/час. Через час она повернула на 90° (вправо или влево) и продолжила движение, потом ползла еще час, потом снова повернула на 90° (вправо или влево) … и т.д. Так она ползла 11 часов, поворачивая на 90° в конце каждого часа. На каком наименьшем расстоянии от домика она могла оказаться ?

   Ответ 5 м.

Решение: Можно рассмотреть координатную сетку с узлами идущими через 5м. Очевидно, черепах ползет по узлам этой сетки. В исходную позицию за 11 часов она вернуться не может. А на расстоянии 5 м может оказаться – легко построить пример.

4. У Коли есть 440 одинаковых кубиков со стороной 1см. Коля сложил из них прямоугольный параллелепипед, все ребра которого имеют длину не менее 5см. Найдите суммарную длину всех ребер этого параллелепипеда.

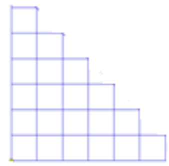
   Ответ:96.

   Решение: $440=2^3$x5x11. Поскольку все ребра имеют длину не менее 5, то их длины 8, 5 и 11. Каждое ребро содержится 4 раза, поэтому суммарная длина равна (8+5+11)*4=96.

5. Назовем число «изумительным», если оно имеет ровно 3 различных нечетных натуральных делителя (и произвольное количество четных). Сколько существует «изумительных» двузначных чисел?

   Ответ: 7.

   Решение: Такие числа имеют вид $2^k \times p^2$, Где p – нечетное простое число. Очевидно, p не превосходит 7, т.к. результат должен быть двузначным. Если p = 3, то k=0,1,2,3; Если p =5, то k=0,1; если p=7, то к=0. Всего 7 вариантов.



6. На клетчатой бумаге нарисовали ступенчатый прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 клеткам (см.рис.). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество прямоугольников можно найти на этом рисунке?

   Ответ: 126

   Решение: Для каждой клеточки найдем количество прямоугольников, в которых эта клеточка является правым верхним углом. Это несложно сделать, можно просто перемножить номер клетки по горизонтали и по вертикали (если начинать с левого нижнего угла и нумеровать с единицы).

6						
5	10					
4	8	12				
3	6	9	12			
2	4	6	8	10		
1	2	3	4	5	6	

   Просуммировав числа по столбцам: 1+…+6+2(1+…5) + 3(1+…4) + 4(1+..+3)+5(1+2)+6= 21 + 30+30+24+15+6 = 126.

7. Найдите все такие трёхзначные числа $\overline{МГУ}$, состоящие из различных цифр *М*, *Г* и *У*, для которых выполняется равенство $\overline{МГУ} = (М + Г + У)\times(М + Г + У - 2)$.

   Ответ: 195

   Решение: Заметим, что М+Г+У ≤ 24 (т.к. цифры разные). Кроме того числа $\overline{МГУ}$ и $(М + Г + У)$ должны давать одинаковые остатки при делении на 9. Это возможно только тогда, когда $М + Г + У$ кратно 3. Заметим, что $М + Г + У \leq 9$ – не подходит, т.к. $(М + Г + У)\times(М + Г + У - 2)$ –двузначное. Перебирая 12, 15,18,21, 24, получаем $\overline{МГУ} = 195 = 15\times13$.