Отборочный этап олимпиады “Покори Воробьевы горы!” по математике состоял из блиц-тура (5 задач на 3 часа) и творческой части (5 задач).

Комплект блиц-задач

Каждый участник отборочного этапа получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим набор типичных задач этого блиц-тура.

---

1. Решите неравенство

$$\frac{2^{\,2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{\,1+\sqrt{x-1}}-8}>1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и принадлежащих интервалу (-70;34).

Решение. Обозначив $t=2^{1+\sqrt{x-1}}$, получим

$$\frac{2t-24}{t-8}\geqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{t-16}{t-8}\geqslant 0 \Longleftrightarrow t\in(-\infty;8)\cup[16;+\infty).$$

Отсюда либо $2^{1+\sqrt{x-1}}<2^3$, $\sqrt{x-1}<2$, $x\in[1;5)$, либо $2^{1+\sqrt{x-1}}\geqslant 2^4$, $\sqrt{x-1}\geqslant 3$, $x\in[10;+\infty)$. Таким образом, решение неравенства $x\in[1;5)\cup(10;+\infty)$. Искомая сумма

$$1+2+3+4+(10+11+12+\ldots+33)=10+\frac{10+33}{2}\cdot 24=526.$$

□

Ответ: 526.

2. Решите уравнение

$$\sin^4 x+5(x-2\pi)^2\cos x+5x^2+20\pi^2=20\pi x.$$

Найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi;6\pi]$, и укажите ее в ответе, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin^4 x+5(x-2\pi)^2(\cos x+1)=0,$$

левая часть которого неотрицательна. Поэтому $\sin x=0$ и $(x-2\pi)^2(\cos x+1)=0$. Поэтому решение уравнения: $x=2\pi$ и $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. На отрезок $[-\pi;6\pi]$ попадает значения $-\pi$, π, 2π, 3π, 5π, сумма которых равна $10\pi\approx 31,4159\ldots$ В ответ записываем $31,42$.

□

Ответ: $31,42$.

3. Внутри прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC взята точка M так, что площади треугольников ABM и BCM составляют треть и четверть площади треугольника ABC соответственно. Найти BM, если $AM=60$ и $CM=70$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Решение. Обозначив $AB=c$, $BC=a$, получим

$$\begin{cases} \left(c-\frac{c}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2=60^2,\\ \left(\frac{c}{4}\right)^2+\left(a-\frac{a}{3}\right)^2=70^2. \end{cases}$$

Решаем систему и находим $BM=\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{4}\right)^2=\frac{100^2}{7}$. Поэтому $BM=\frac{100}{\sqrt{7}}$. В ответ записываем ближайшее целое.

□

Ответ: 38.

4. Первая бригада рабочих делает асфальт на одном участке дороги, а вторая бригада, в которой на 6 рабочих больше, — на другом, площадь которого втрое больше. Производительность всех рабочих одинакова. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде, если свою работу она выполнила быстрее? Если решений нет, то в ответе поставьте 0.

Решение. Если в первой бригаде n рабочих, площадь первого участка равна S, а производительность одного рабочего равна x, то условие задачи запишется в виде $\frac{S}{nx} < \frac{3S}{(n+6)x}$, откуда следует $\frac{1}{n} < \frac{3}{n+6}$, и $n > 3$. Таким образом, наименьшим возможным n является 4.

□

Ответ: 4.

5. Найдите все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1, \\ x + 2y = a. \end{cases}$$

имеет единственное решение. При необходимости округлите его до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответе поставьте 0.

Решение. Так как $2y = a - x$, то из первого уравнения получим:

$$x^2 + (a-x)^2 = 1 \Longleftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение при $\frac{D}{4} = 2 - a^2 = 0$. Значит, $a = \pm\sqrt{2}$, наименьшее значение равно $-\sqrt{2} \approx -1,414214\ldots$. □

Ответ: $-1,41$.

I-A. Сумма 28218 натуральных чисел равна $2016 \cdot 15$, а их произведение — $(2016^2 + 15)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Решение. Из разложения $2016^2 + 15 = 3 \cdot 19 \cdot 113 \cdot 631$ делаем вывод, в задаче

$$\begin{cases} a_1 + \ldots + a_{28218} = 2016 \cdot 15; \\ a_1 \cdot \ldots \cdot a_{28218} = 2016^2 + 15 = 3 \cdot 19 \cdot 113 \cdot 631 \end{cases}$$

чисел a_k не равных 1 может быть не более 4 (т.е. не более чем количество простых делителей), поэтому задача равносильна следующей

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2026; \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 3 \cdot 19 \cdot 113 \cdot 631; \\ a_5 = a_6 = \ldots = a_{28218} = 1. \end{cases}$$

Решаем последнюю задачу: Набор a_1, a_2, a_3, a_4 состоит из чисел 1, 19, 113, $3 \cdot 631$.

Остается вычислить $(3 \cdot 631) + 1 = 1894$.

Ответ: 1894.

□

1. Сумма 28218 натуральных чисел равна $2016 \cdot 15$, а их произведение — $(2016^2 + 15)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Ответ 1894.

2. Сумма 1289 натуральных чисел равна $2016 + 19$, а их произведение — $(2016^2 + 19)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 19 = 5^2 \cdot 17 \cdot 73 \cdot 131$.

Ответ 656.

3. Сумма 16054 натуральных чисел равна $2016 \cdot 9$, а их произведение — $(2016^2 - 9)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 - 9 = 3^2 \cdot 11 \cdot 61 \cdot 673$.

Ответ 2020.

4. Сумма 50178 натуральных чисел равна $2016 \cdot 27$, а их произведение — $(2016^2 + 27)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 27 = 3^3 \cdot 109 \cdot 1381$.

Ответ 4144.

5. Сумма 1118 натуральных чисел равна $2016 + 44$, а их произведение — $(2016^2 + 44)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 44 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 97 \cdot 419$.

Ответ 839.

6. Сумма 82705 натуральных чисел равна $2016 \cdot 46$, а их произведение — $(2016^2 + 46)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 46 = 2 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 4993$.

Ответ 9987.

7. Сумма 8571 натуральных чисел равна $2016 \cdot 6$, а их произведение — $(2016^2 + 6)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 6 = 2 \cdot 3 \cdot 439 \cdot 1543$.

Ответ 3087.

8. Сумма 10780 натуральных чисел равна $2016 \cdot 9$, а их произведение — $(2016^2 + 9)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 9 = 3^2 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 2441$.

Ответ 7324.

9. Сумма 1265 натуральных чисел равна $2016 + 33$, а их произведение — $(2016^2 + 33)$. Найдите все возможные наборы таких чисел. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из чисел всех найденных наборов. Если таких чисел не существует, то в ответе укажите число 0.

Указание: $2016^2 + 33 = 3 \cdot 41 \cdot 173 \cdot 191$.

Ответ 574.

II-A. Решите уравнение

$$(1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x)^4 + (\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x)^4 = \frac{3}{4} + \frac{\cos 8x}{4}.$$

Найдите сумму всех корней на промежутке A, округлив при необходимости до целого числа. Если корней нет или их на этом промежутке бесконечно много, в ответе запишите цифру 0.

Решение. 1-ый способ решения. Справедливо

$$\begin{aligned}&(1 + \cos 4x) + (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = \cos 2x\,(2\cos 2x + 2\cos 2x + 1),\\ &\sin 2x + \sin 4x + (\sin x + \sin 3x) = \sin 2x\,(1 + 2\cos 2x + 2\cos x).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&(2\cos 2x + 2\cos 2x + 1)^4\left(\cos^4 2x + \sin^4 2x\right) = \frac{3}{4} + \frac{1 - 2\sin^2 4x}{4} \Longleftrightarrow\\ &\left(4\cos^2 x + 2\cos x - 1\right)^4\left(\cos^4 2x + \sin^4 2x\right) = 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} \Longleftrightarrow\\ &\left(4\cos^2 x + 2\cos x - 1\right)^4\left(1 - \frac{\sin^2 4x}{2}\right) = 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} \Longleftrightarrow\\ &\left(4\cos^2 x + 2\cos x - 1\right)^4 = 1 \Longleftrightarrow\\ &4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = \pm 1.\end{aligned}$$

Решая квадратные (относительно переменной $\cos x$) уравнения $4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0$ и $4\cos^2 x + 2\cos x = 0$ приходим к $\cos x = 1/2;\ -1;\ 0;\ -1/2$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2-ый способ решения. Как легко заметить, на множестве $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ решений нет. Рассмотрим все остальные значения $x \in \mathbb{R}$. Уравнение равносильно:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}\cos 2x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^4 + \left(\frac{\sin\frac{5x}{2}\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^4 = 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} \Longleftrightarrow\\ &\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^4\left(\cos^4 2x + \sin^4 2x\right) = 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} \Longleftrightarrow\\ &\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^4\left(1 - \frac{\sin^2 4x}{2}\right) = 1 - \frac{\sin^2 4x}{2} \Longleftrightarrow\\ &\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^4 = 1.\end{aligned}$$

Решим уравнение

$$\sin\frac{5x}{2} = \pm\sin\frac{x}{2} \iff \left[\begin{array}{l} \frac{5x}{2} = \pm\frac{x}{2} + 2\pi n, \\ \frac{5x}{2} = \pi \pm \frac{x}{2} + 2\pi m, \end{array}\right. \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x = 2\pi n, \\ 2x = 2\pi n, \\ 3x = \pi + 2\pi n, \\ 2x = \pi + 2\pi n. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi n}{3}, \\ x = \pi n, \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n. \end{array}\right.$$

Исходное уравнение на множестве $x \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ равносильно

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi m}{3}, \ m \in \mathbb{Z}, m \neq 3s, s \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: На множестве $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$. Ответ $\frac{5\pi}{2} + 8\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

□

1. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1009$. Ответ 25367.
2. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1010$. Ответ 25392.
3. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1011$. Ответ 25417.
4. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1012$. Ответ 25442.
5. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1013$. Ответ 25467.
6. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1014$. Ответ 25492.
7. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1015$. Ответ 25518.
8. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1016$. Ответ 25543.
9. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1017$. Ответ 25568.
10. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1018$. Ответ 25593.

III-A. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что про неё известно следующее свойство: *если к сумме квадратов всех сторон треугольника прибавить утроенную сумму всех квадратов расстояний от точки M до вершин треугольника, то получится величина, которая не превосходит* $24 \cdot x$. Найдите сторону треугольника y, если известно, что площадь треугольника ABC не менее $\sqrt{3} \cdot x$. При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

Решение. Обозначим через C_1 и B_1 проекцию точек C и B на прямую AM. Тогда справедливо:

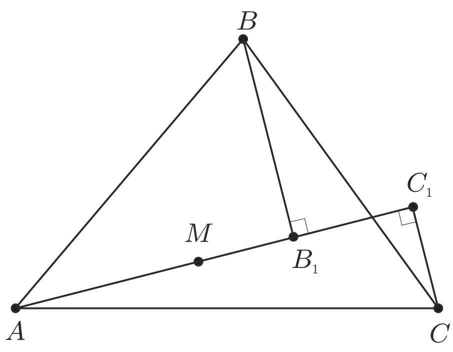

Рис. 1:

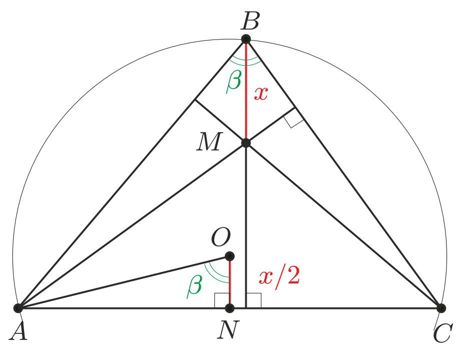

Рис. 2:

$$4(S_{AMB} + S_{AMC}) = 2 \cdot AM \cdot (BB_1 + CC_1) \leqslant 2 \cdot AM \cdot BC =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} AM \cdot BC\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(3 \cdot AM^2 + BC^2\right).$$

Аналогично, получаем

$$4(S_{BMC} + S_{BMA}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(3 \cdot BM^2 + AC^2\right),$$
$$4(S_{CMA} + S_{CMB}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(3 \cdot CM^2 + AB^2\right).$$

Таким образом
$$8\sqrt{3}S_{ABC} \leqslant AB^2 + AC^2 + BC^2 + 3(AM^2 + BM^2 + CM^2).$$

Докажем, что знак равно в данном неравенстве достигается только в случае правильного треугольника. Для этого докажем, что все углы равны по $60°$. Проведём доказательство для угла β (см. рис. 2) и покажем, что $\beta = 60°$. Остальные углы доказываются аналогично. Пусть O — центр описанной окружности вокруг треугольника ABC. Поскольку во всех переходах в неравенствах должен стоять знак равно, то M — точка персесечения высот и

$$AC = BM\sqrt{3} \Longleftrightarrow b = \sqrt{3}x.$$

Следовательно из треугольника AON получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AN}{ON} = \frac{b/2}{x/2} = \sqrt{3} \Longleftrightarrow \beta = 60°.$$

Но из условия вытекает, что

$$8\sqrt{3}S_{ABC} \geqslant 24x \geqslant AB^2 + AC^2 + BC^2 + 3(AM^2 + BM^2 + CM^2).$$

Следовательно треугольник ABC равностороний.

Ответ: $2\sqrt{x}$.

□

1. Известно, что $x = 2014$, найдите $y = AC$. Ответ 89.76.
2. Известно, что $x = 2015$, найдите $y = AB$. Ответ 89.78.
3. Известно, что $x = 2013$, найдите $y = BC$. Ответ 89,73.
4. Известно, что $x = 2017$, найдите $y = AC$. Ответ 89.82.
5. Известно, что $x = 2018$, найдите $y = AB$. Ответ 89.84.
6. Известно, что $x = 2019$, найдите $y = BC$. Ответ 89.87.
7. Известно, что $x = 2020$, найдите $y = AC$. Ответ 89.89.
8. Известно, что $x = 2021$, найдите $y = AB$. Ответ 89.91.
9. Известно, что $x = 2022$, найдите $y = BC$. Ответ 89.93.
10. Известно, что $x = 2023$, найдите $y = AC$. Ответ 89.96.
11. Известно, что $x = 2024$, найдите $y = AB$. Ответ 89.98.
12. Известно, что $x = 2026$, найдите $y = BC$. Ответ 90.02.

IV-A. Определим $f(a)$ как функцию, равную количеству различных решений уравнения

$$\sin \frac{a\pi x}{x^2+1} + \cos \frac{\pi(x^2+4ax+1)}{4x^2+4} = \sqrt{2-\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Например, $f(a_1) = 3$ означает, что при $a = a_1$ это уравнение имеет три различных решения x_1, x_2, x_3. Если при $a = a_0$ уравнение корней не имеет, то положим $f(a_0) = 0$.

Решите неравенство $f(a) \leqslant 5$. В ответ запишите суммарную длину получившихся интервалов, округлив ее, при необходимости, до двух знаков после запятой. Если решений нет, то напишите число 0; если получившаяся длина бесконечна, то напишите число 9999.

Решение. Пусть $t = \frac{a\pi x}{x^2+1}$. Тогда уравнение принимает вид $\sin t + \cos(\frac{\pi}{4} + t) = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ или

$$\begin{aligned}
&\sin t + \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \sqrt{2-\sqrt{2}} \Longleftrightarrow \\
&2\sin\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{8} - t\right) = \sqrt{2-\sqrt{2}} \Longleftrightarrow \\
&\cos\left(\frac{\pi}{8} - t\right) = 1.
\end{aligned}$$

Из последней формулы видно, что если t заменить на $-t$ количество решений не меняется. Следовательно функция $f(a)$ — чётная.

Решим неравенство $|f(a)| \leqslant 5$. Последнее неравенство означает, что корней у исходного уравнения должно быть не более 5. Для этого решаем уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{8} - t\right) = 1$:

$$t = \frac{\pi}{8} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $t = \frac{a\pi x}{x^2+1}$, то

$$x^2 - \frac{a}{2k+1/8}x + 1 = 0.$$

Отметим, что при различных значениях $b = b_1$ и $b = b_2$ уравнения $x^2 - b_1x + 1 = 0$ и $x^2 - b_2x + 1 = 0$ не имеют общих корней. Действительно, если эти уравнения имеют общий корень, то по теореме Виета совпадут и два других корня, а значит, $b_1 = b_2$. При каждом фиксированном $k \in \mathbb{Z}$ решение существует, если $D \geqslant 0$, причем при $D = 0$ имеется одно решение, при $D > 0$ – два. Условие $D \geqslant 0$ равносильно

$$\left(\frac{a}{2k+\frac{1}{8}}\right)^2 - 4 \geqslant 0 \Longleftrightarrow |a| \geqslant \left|2\left(2k + \frac{1}{8}\right)\right|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&|a| < \frac{1}{4} \Longrightarrow \quad \text{решений нет}, \quad |a| = \frac{1}{4} \Longrightarrow \quad 1 \text{ решение}, \\
&|a| \in \left[\frac{1}{4}; \frac{15}{4}\right) \Longrightarrow \quad 2 \text{ решения}, \quad |a| = \frac{15}{4} \Longrightarrow \quad 3 \text{ решения}, \\
&|a| \in \left[\frac{15}{4}; \frac{17}{4}\right) \Longrightarrow \quad 4 \text{ решения}, \quad |a| = \frac{17}{4} \Longrightarrow \quad 5 \text{ решений}, \\
&|a| > \frac{17}{4} \Longrightarrow \quad \text{более } 5 \text{ решений}.
\end{aligned}$$

Ответ: $a \in [-\frac{17}{4}; \frac{17}{4}]$, длина интервала равна $8,5$. □

1. Уравнение:

$$\sin\frac{a\pi x}{x^2+1} + \cos\frac{\pi(x^2+4ax+1)}{4x^2+4} = \sqrt{2-\sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leqslant 5$. **Ответ:** $a \in [-\frac{17}{4}; \frac{17}{4}]$, длина интервала равна $8,5$.

2. Уравнение:

$$\cos\frac{a\pi x}{x^2+4} + \sin\frac{\pi(x^2+4ax+4)}{4x^2+16} = \sqrt{2+\sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leqslant 7$. **Ответ:** $a \in [-\frac{31}{2}; \frac{31}{2}]$, длина интервала равна 31.

3. Уравнение:

$$\cos\frac{a\pi x}{x^2+1} + \sin\frac{\pi(x^2-4ax+1)}{4x^2+4} = -\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leqslant 5$. **Ответ:** $a \in [-\frac{23}{4}; \frac{23}{4}]$, длина интервала равна $11,5$.

4. Уравнение:

$$\sin\frac{2a\pi x}{x^2+1} + \cos\frac{\pi(x^2+8ax+1)}{4x^2+4} = -\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leqslant 7$. **Ответ:** $a \in [-\frac{25}{8}; \frac{25}{8}]$, длина интервала равна $6,25$.

5. Уравнение:

$$\sin\frac{a\pi x}{x^2+1} - \cos\frac{\pi(x^2+4ax+1)}{4x^2+4} = -\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leqslant 5$. **Ответ:** $a \in [-\frac{19}{4}; \frac{19}{4}]$, длина интервала равна $9,5$.

6. Уравнение:

$$\cos\frac{2a\pi x}{x^2+1} - \sin\frac{\pi(x^2+8ax+1)}{4x^2+4} = \sqrt{2-\sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leqslant 7$. **Ответ:** $a \in [-\frac{29}{8}; \frac{29}{8}]$, длина интервала равна $7,25$.

7. Уравнение:

$$\sin\frac{a\pi x}{x^2+1} + \sin\frac{\pi(x^2+4ax+1)}{4x^2+4} = -\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leqslant 9$. **Ответ:** $a \in [-\frac{37}{4}; \frac{37}{4}]$, длина интервала равна $18,5$.

8. Уравнение:

$$\cos\frac{a\pi x}{x^2+4} - \cos\frac{\pi(x^2-4ax+4)}{4x^2+16} = -\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

неравенство $f(a) \leqslant 5$. **Ответ:** $a \in [-\frac{21}{2}; \frac{21}{2}]$, длина интервала равна 21.

V-A. Пусть a_n — количество перестановок $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ чисел $(1, 2, \ldots, n)$ таких, что выполнены два условия:

- $k_1 = 1$;
- Для любого номера $i = 1, 2, \ldots, n-1$ выполнено неравенство $|k_i - k_{i+1}| \leqslant 2$.

Каково число a_N?

Решение. Докажем в несколько шагов:

Шаг 1. Докажем, что есть рекуррентное соотношение: $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1$. Возможны следующие начала перестановки:

- В последовательности $(1, 2, \ldots,)$. Отбросим первую единицу, а остальные числа уменьшим на 1. То, что получилось, удовлетворяет условиям на перестановки при $n-1$. Следовательно, таких перестановок a_{n-1}.
- В последовательности $(1, 3, 2, 4, \ldots,)$. Отбросим первые три члена перестановки $((1, 3, 2))$. Остальные числа уменьшим на три. То, что получилось, удовлетворяет условиям на перестановки при $n-3$. Следовательно, таких перестановок есть a_{n-3}.
- Есть ещё одна перестановка вида $(1, 3, 5, 7, ..., 6, 4, 2)$. В середине — переход с последнего нечётного числа, не превосходящего n к последнему чётному числу, не превосходящего n. Таким образом, получили

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1. \tag{2}$$

Шаг 2. Вычисляем начальные элементы последовательности

$a_1 = 1,\quad a_2 = 1,\quad a_3 = 2,\quad a_4 = 4,\quad a_5 = 6,\quad a_6 = 9,\quad a_7 = 14,\quad a_8 = 21,\quad a_9 = 31,$
$a_{10} = 46,\quad a_{11} = 68,\quad a_{12} = 100,\quad a_{13} = 147,,\quad a_{14} = 216,\quad a_{15} = 317,$
$a_{16} = 465,\quad a_{17} = 682,\quad a_{18} = 1000,\quad a_{19} = 1466,\quad a_{20} = 2149,\quad a_{21} = 3150,$
$a_{22} = 4617,\quad a_{23} = 6767,\quad a_{24} = 9918,\quad a_{25} = 14536,\quad a_{26} = 21304,\quad a_{27} = 31223,$
$a_{28} = 45760,\quad a_{29} = 67065,\quad a_{30} = 98289,\quad a_{31} = 144050,\quad a_{32} = 211116,\quad a_{33} = 309406,$
$a_{34} = 453457,\quad a_{35} = 664574,\quad a_{36} = 973981,\quad a_{37} = 1427439,\quad a_{38} = 2092014,$
$a_{39} = 3065996,\quad a_{40} = 4493436,\quad a_{41} = 6585451,\quad a_{42} = 9651448,\quad a_{43} = 14144885,$
$a_{44} = 20730337,\quad a_{45} = 30381786,\quad a_{46} = 44526672,\quad a_{47} = 65257010.$

Ответ: $a_{41} = 6585451$.

$\square$

1. $N = 41$. Ответ 6585451.
2. $N = 42$. Ответ 9651448.
3. $N = 43$. Ответ 14144885.
4. $N = 44$. Ответ 20730337.
5. $N = 45$. Ответ 30381786.
6. $N = 46$. Ответ 44526672.
7. $N = 34$. Ответ 453457.
8. $N = 35$. Ответ 664574.
9. $N = 36$. Ответ 973981.
10. $N = 37$. Ответ 1427439.
11. $N = 38$. Ответ 2092014.
12. $N = 39$. Ответ 3065996.
13. $N = 40$. Ответ 4493436.