Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Решения и ответы к задачам варианта 171, ответы к вариантам 172 – 174

1. Брюки дешевле куртки, куртка дешевле пальто, пальто дешевле шубы, а шуба дешевле бриллиантового колье на один и тот же процент. На сколько процентов шуба дороже брюк, если бриллиантовое колье дороже пальто в 6,25 раз?

Ответ: на 1462,5%.

Решение. По условию $\frac{БК}{Ш}=\frac{Ш}{П}=\frac{П}{К}=\frac{К}{Б}=\alpha$. При этом стоимость бриллиантового колье (*БК*) связана со стоимостью пальто (*П*) соотношением $БК=П\cdot\alpha^2$. Тогда $\alpha=\sqrt{6,25}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$.

Связь между стоимостью шубы (*Ш*) и брюк (*Б*) определяется соотношением $Ш=Б\cdot\alpha^3=Б\cdot\frac{125}{8}$.

Отсюда $\frac{Ш}{Б}=\frac{125}{8}$, и искомая величина определяется как $\left(\frac{125}{8}-1\right)\cdot 100=1462,5$.

Ответ к варианту 172: на 78,4%.

Ответ к варианту 173: на 93,6%.

Ответ к варианту 174: на 309,6%.

2. В кошельке у купца Ганса лежат 20 серебряных монет по 2 кроны, 15 серебряных монет по 3 кроны и 3 золотых дуката (1 дукат равен 5 крон). Сколькими способами Ганс может уплатить сумму в 10 дукатов? Монеты одного достоинства неразличимы.

Ответ: 26.

Решение. Если купец заплатил x монет по 2 кроны, y монет по 3 кроны и z дукатов (то есть z раз по 5 крон), то получается система: $2x+3y+5z=50$, $x\in[0;20]$, $y\in[0;15]$, $z\in[0;3]$.

а) При $z=0$ получаем уравнение $2x+3y=50$, имеющее подходящие по условию решения при $y=4$, 6, 8, 10, 12, 14 – всего 6 решений.

б) При $z=1$ получаем уравнение $2x+3y=45$, имеющее подходящие по условию решения при $x=0$, 3, 6, 9, 12, 15, 18 – всего 7 решений.

При $z=2$ получается 7 решений, при $z=3$ – 6 решений. Эти два случая можно было разобрать аналогично предыдущему. Но можно этого не делать, используя тот факт, что оплачиваемая сумма равна ровно половине всех денег купца. Поэтому количество способов, использующих 2 дуката, равно количеству способов, использующих 1 дукат (так как 2 дуката останется в кошельке); аналогично количество способов, использующих 3 дуката, равно количеству способов без дукатов.

Таким образом, всего способов: $6+7+7+6=26$.

Ответ к варианту 172: 17 способов.

Ответ к варианту 173: 26 способов.

Ответ к варианту 174: 22 способа.

3. Определите, при каких значениях *n* и *k* уравнение $\sin x+\sin y=\frac{\pi k}{2017}$ является следствием уравнения $x+y=\frac{\pi n}{48}$.

Ответ: $k=0$, $n=96m$, $m\in Z$.

Решение. Пара $\left(0,\frac{\pi n}{48}\right)$ является решением второго уравнения, следовательно, $\sin\frac{\pi n}{48}=\frac{\pi k}{2017}$. Пара $(\pi;\frac{\pi n}{48}-\pi)$ также есть решение второго уравнения, следовательно, $-\sin\frac{\pi n}{48}=\frac{\pi k}{2017}$. С необходимостью должны выполняться условия: $k=0$, $\sin\frac{\pi n}{48}=0$, то есть $n=48l$, $l\in Z$.

Проверим достаточность полученных значений. Подставим пару $(x;\pi l-x)$в первое уравнение, получим: $\sin x+\sin(\pi l-x)=\sin x+(-1)^{l-1}\sin x$, что равно 0 только для чётных *l*, то есть $l=2m$.

Ответ к варианту 172: $k=0$, $n=108m$, $m\in Z$.

Ответ к варианту 173: $k=0$, $n=88m$, $m\in Z$.

Ответ к варианту 174: $k=0$, $n=112m$, $m\in Z$.

4. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* и $\angle ABC=\frac{\pi}{9}$ на стороне *AB* выбрана точка *D* так, что $BD=AC$. Найдите величину угла $\angle DCB$ (в радианах) и сравните её с 0,18.

Ответ: $\angle DCB=\frac{\pi}{18}$; $\frac{\pi}{18}<0{,}18$.

Решение. Выбрать внутри ΔABC на его высоте точку *O*, так чтобы ΔAOC был равносторонним. Далее из равенства треугольников *DBC* и *OCB* вытекает $\angle DCB = \angle OBC$. Поэтому $\angle DCB = \dfrac{\pi}{18}$. При этом $\dfrac{\pi}{18} < 0{,}18 \Leftrightarrow \pi < 3{,}24$.

2 способ решения (подобные ему способы будут встречаться чаще). Пусть $AB = BC = a$, $\angle DCB = \varphi.$ Тогда $AC = BD = 2a\sin 10^\circ$, и применяя теорему синусов для треугольника BCD, получаем $\dfrac{a}{\sin(160^\circ - \varphi)} = \dfrac{2a\sin 10^\circ}{\sin\varphi}$.

Уравнение $\dfrac{a}{\sin(160^\circ - \varphi)} = \dfrac{2a\sin 10^\circ}{\sin\varphi}$ равносильно $\sin\varphi = 2\sin 10^\circ \cdot \sin(160^\circ - \varphi) \Leftrightarrow$

$$\sin\varphi = 2\sin 10^\circ \cdot \left(\sin 20^\circ \cos\varphi + \cos 20^\circ \sin\varphi\right) \Leftrightarrow$$

$$\sin\varphi = \left(\cos 10^\circ - \cos 30^\circ\right)\cos\varphi + \left(\sin 30^\circ - \sin 10^\circ\right)\sin\varphi \Leftrightarrow$$

$$\left(\sin 30^\circ + \sin 10^\circ\right)\sin\varphi = \left(\cos 10^\circ - \cos 30^\circ\right)\cos\varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos 10^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ + \sin 10^\circ} \Leftrightarrow$$

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sin 20^\circ \cdot \sin 10^\circ}{2\sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ} = \operatorname{tg}10^\circ$. Так как угол φ острый, то $\varphi = 10^\circ = \dfrac{\pi}{18}$.

Ответ к варианту 172: $\angle PKL = \dfrac{\pi}{18}$; $\dfrac{\pi}{18} > 0{,}17$.

Ответ к варианту 173: $\angle DBA = \dfrac{\pi}{18}$; $\dfrac{\pi}{18} < 0{,}18$.

Ответ к варианту 174: $\angle PMK = \dfrac{\pi}{18}$; $\dfrac{\pi}{18} > 0{,}17$.

5. Решите неравенство $x + \sqrt{x^2 + 4} \ge \left(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x + 2}\right) \cdot 8^{x+1}$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right]$.

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$2\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}\right) \ge \left(2x + 1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 1}\right) \cdot 8^{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \ge \left(2x + 1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 1}\right) \cdot 2^{3x+2}.$$

Функция $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ всюду положительна и монотонно возрастает. При $t \geq 0$ это очевидно, при $t < 0$ это тоже верно, так как тогда $\frac{1}{f(t)} = \sqrt{t^2 + 1} - t$ – положительна и убывает. Факт возрастания можно доказать и с помощью производной.

Если $\frac{x}{2} = 2x + 1$, то $x = -\frac{2}{3}$. Тогда $f\left(\frac{x}{2}\right) = f(2x+1)$, $2^{3x+2} = 1$, и левая часть неравенства равна правой.

Если $x > -\frac{2}{3}$, то $\frac{x}{2} < 2x + 1$, $0 < f\left(\frac{x}{2}\right) < f(2x+1)$, $2^{3x+2} > 1$,

$\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} < \left(2x + 1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 1}\right) \cdot 2^{3x+2}$ – неравенство не выполняется.

Если $x < -\frac{2}{3}$, то $\frac{x}{2} > 2x + 1$, $f\left(\frac{x}{2}\right) > f(2x+1) > 0$, $2^{3x+2} < 1$

$\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} > \left(2x + 1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 1}\right) \cdot 2^{3x+2}$ – неравенство выполняется.

Таким образом, $x \leq -\frac{2}{3}$.

Ответ к варианту 172: $x \in \left[-\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

Ответ к варианту 173: $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

Ответ к варианту 174: $x \in \left[\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

Ответы и решения к варианту ***1–1*** *(2)*

1. По условию, эти числа записываются только цифрами 0, 1, 2, 6, 8. Тогда трехзначные числа, кратные 4, могут иметь на конце в точности 10 вариантов: 00, 08, 12, 16, 20, 28, 60, 68, 80, 88. При этом на первом месте в каждом их этих 10 вариантов может стоять любая из 4 цифр 1, 2, 6, 8. Кроме того, последние 8 вариантов дают двузначные числа, а второй — однозначное. Значит, всего таких чисел: $10 \cdot 4 + 8 + 1 = 49$.

Ответ: 49.

Ответ к варианту: *1–2*: 53.

Решения варианта 1–2.

По условию, эти числа записываются только цифрами 0, 2, 3, 4, 5, 7. Тогда трехзначные числа, кратные 4, могут иметь на конце в точности 9 вариантов: 00, 04, 20, 24, 32, 40, 44, 52, 72. При этом на первом месте в каждом их этих 9 вариантов может стоять любая из 5 цифр 2, 3, 4, 5, 7. Кроме того, последние 7 вариантов дают двузначные числа, а второй — однозначное. Значит, всего таких чисел: $9 \cdot 5 + 7 + 1 = 53$.

2. См. рис. 1.

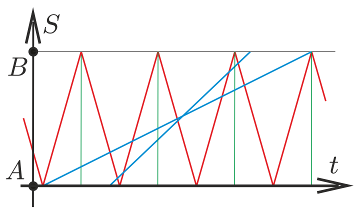

Рис. 1:

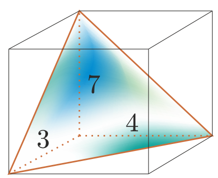

Рис. 2:

Из рисунка видно, что скорость v км/ч автобуса может быть больше скорости велосипедиста в k раз, где $k \in (3; 7]$.

Ответ: $33 < v \leqslant 77$.

Ответ к варианту: *1–2*: $5 \leqslant v < 9$.

Решения варианта 1–2.

Из рисунка 1 видно, что скорость v км/ч курьера может быть меньше скорости автобуса в k раз, где $k \in (5; 9]$.

3. С одной стороны, $V = \frac{1}{3}h_1S_1 = \frac{1}{3}h_2S_2 = \frac{1}{3}h_3S_3$. Поэтому

$$r = \frac{3V}{S_{\text{полн}}} = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{37}{84}} = \frac{6}{7}.$$

Замечание. Существование пирамиды показано на рис. 2, здесь на прямоугольном параллелепипеде постороена пирамида. Три высоты совпадают со сторонами, а четвёртая высота будет равна $84/37$.

Ответ: $\frac{6}{7}$.

Ответ к варианту: *1–2*: $\frac{10}{9}$.

4. Переписав неравенство, получаем: $\log_3 x \cdot (a - \log_2 3) > 1$. Если $a = \log_2 3$, то решений нет. Если $a > \log_2 3$, то $x > 3^{\frac{1}{a - \log_2 3}} > 1$. Если $a < \log_2 3$, то $0 < x < 3^{\frac{1}{a - \log_2 3}} < 1$.

Ответ: $a < \log_2 3$.

Ответ к варианту: *1–2*: $a > \log_3 5$.

5. *1 способ решения.*

$$(\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ) + (\operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ) = -\frac{\sin 54^\circ}{\cos 9^\circ \cos 63^\circ} + \frac{\sin 54^\circ}{\cos 81^\circ \cos 27^\circ} =$$
$$= \frac{\sin 54^\circ \cdot (\cos 9^\circ \cos 63^\circ - \sin 9^\circ \sin 63^\circ)}{\cos 9^\circ \cos 63^\circ \cos 81^\circ \cos 27^\circ} =$$
$$= \frac{2 \sin 27^\circ \cos 27^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\cos 9^\circ \sin 27^\circ \sin 9^\circ \cos 27^\circ} = \frac{4 \cos 72^\circ}{2 \cos 9^\circ \sin 9^\circ} = \frac{4 \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ} = 4.$$

2 способ решения.

$$(\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ) - (\operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 27^\circ) = 2\left(\frac{1}{\sin 18^\circ} - \frac{1}{\cos 36^\circ}\right).$$

Используя равенства $\sin 18^\circ = (\sqrt{5} - 1)/4$, $\cos 36^\circ = (\sqrt{5} + 1)/4$, получаем

$$2\left(\frac{4}{\sqrt{5} - 1} - \frac{4}{\sqrt{5} + 1}\right) = 4.$$

Заметим, что

$$\frac{200}{157}\pi = 4 \cdot \frac{100}{314}\pi > 4.$$

Ответ: Второе число больше.

Ответ к варианту: *1–2*: Первое число больше.

*Ответы и решения к варианту **3–1** (2)*

1. Положим $t = \pi/4 - x/3$. Тогда исходное неравенство равносильно:

$$3\cos 2t + 2\cos t - 5 \geqslant 0 \iff 3(2\cos^2 t - 1) + 2\cos t - 5 \geqslant 0 \iff$$
$$\iff 6(\cos t - 1)\left(\cos t + \frac{4}{3}\right) \geqslant 0.$$

Получаем $\cos t \in (-\infty; -4/3] \cup [1; +\infty)$. С учётом множества значения косинуса $\cos t = 1$ или $\pi/4 - x/3 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 6\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ к варианту: *3–2*: $x = -\frac{3\pi}{4} + 6\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Биссектриса треугольника ABM служит его высотой, поэтому $AB = BM = MC \equiv x$, а также $AL : LC = AB : BC = 1 : 2$, откуда $AL \equiv y$ и $CL = 2y$. Далее, имеем

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABL}} = \frac{S_{ACM}}{S_{BCL}/2} = \frac{x \cdot 3y}{2x \cdot 2y/2} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{ABM} = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15.$$

Ответ: 15.

Ответ к варианту: *7–2*: 8.

3. На О.Д.З. неравенство равносильно $(\pi - 3)^{\ln(x^2 - 2x)} \leqslant (\pi - 3)^{\ln(2-x)}$ или $x^2 - 2x \geqslant 2 - x$. Решение неравенства $x^2 - x - 2 \geqslant 0$ — множество $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ с учётом О.Д.З. получаем $x \in (-\infty; -1]$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1]$.

Ответ к варианту: *3–2*: $x \in (-\infty; -2]$.

4. Условие означает, что полином $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c$ делится на полином третьей степени $x^3 + (8+b)x^2 + (b+4)x + (c+3)$ без остатка. Данное условие равносильно системе

$$\begin{cases} a - b - 4 = (8 + b)(-3 - b), \\ b - (c + 3) = (4 + b)(-3 - b), \\ c = (c + 3)(-3 - b). \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем $c + 3$ и подставляем в правую часть третьего: $c = (b^2 + 8b + 12)(-3 - b)$. Теперь полученное уравнение складываем со вторым и получаем уравнение на b: $b^3 + 12b^2 + 44b + 45 = 0$. Откуда единственным целочисленным решением будет $b = -5$. Следовательно $a = 5$, $c = -6$. Как легко убедиться уравнение $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ имеет три решения ± 1, -3.

Ответ: $a = 5$, $b = -5$, $c = -6$.

Ответ к варианту: *3–2*: $a = 5$, $b = -6$, $c = -5$.

5. Обозначим через a сторону основания. В правильный шестиугольник можно вписать окружность радиуса $R = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. расстояние между плоскостями основания равно $2R$. Поэтому в призму можно вписать шар радиуса R (у нас $R = 1$).

Введём систему координат, как указано на рис. 3. Тогда уравнение плоскости принимает вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{a\sqrt{3}} + \frac{z}{a\sqrt{3}} = 1$, а координаты точки центра вписанного шара $\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Следовательно расстояние от точки до плоскости равно

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{a}\sqrt{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

Откуда $h = R - \varrho = \frac{a\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (см. рис. 4) и $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{10\sqrt{5} - 14}{15\sqrt{5}}$.

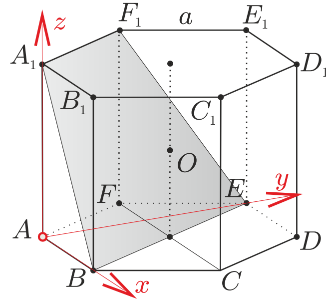

Рис. 3:

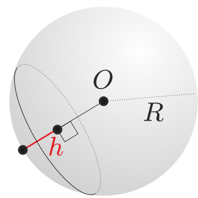

Рис. 4:

Ответ: $\pi\frac{10\sqrt{5} - 14}{15\sqrt{5}}$.

Ответ к варианту: *3–2*: $\pi\frac{10\sqrt{5} + 14}{15\sqrt{5}}$.

Ответы и решения к варианту 4–1 (2)

1. Выделяя полные квадраты и переходя в логарифмах к другим основаниям, получаем

$$\log_3(27+2(x+1)^2)+\log_5(3(x+1)^2+25)=\log_2(32-(1+x)^2).$$

Левая часть не меньше 5, а правая не больше 5.

Ответ: $x=-1$. Ответ к варианту: *4–2*: $x=1$.

2. На периоде левая часть определена при $x\in[0;\pi/2]$. Поскольку при $x=0$ и $x=\pi/2$ неравенство не выполняется, то достаточно рассмотреть случай $x\in(0;\pi/2)$ для которого выполнены неравенства:

$$\sqrt{\sin x}>\sin^2 x,\quad \sqrt{\cos x}>\cos^2 x.$$

Значит

$$\left(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)^7>\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^7=1.$$

Ответ: $2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Ответ к варианту: *4–2*: $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

3. Пусть n и m число землекопов в первой и второй бригадах, производительность каждого землекопа 1, t — время работы первой бригады. Тогда

$$\begin{cases} nt=m\left(t+\frac{1}{2}\right),\\ nt=(n+5)(t-2),\\ n,m\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Исключая переменную t, получаем $4n^2-4nm+20n-25m=0$. Откуда

$$m=n-\frac{5}{4}+\frac{125}{4(4n+25)}\iff 4m=4n-5+\frac{125}{4n+25}$$

Так как n — натуральное, то $4n+25=125$.

Ответ: в первой 25, во второй — 24.

4. Пусть AH высота треугольника ABC, $\varphi=\angle DAH$, тогда $AH=AD\cos\varphi$ и площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}BC\cdot AD\cos\varphi$ (см. рис. 5).

1. Найдём AD. Пусть, O — центр описанной окружности радиуса R, $EF=2R$ — диаметр этой окружности. По тереме синусов для треугольника ABC: $2R=\frac{a}{\sin\alpha}$. Из подобия треугольников DBE и ABE (так как имеют общий угол с вершиной в точке E, а углы $\angle CBE$ и $\angle CAB$ равны как опирающиеся на одну дугу CE) следует $AE:BE=BE:DE$. Откуда $DE=BE^2:AE$. По тереме синусов для треугольника ABE, получаем $BE=2R\sin\frac{\alpha}{2}$. Значит $DE=\frac{4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{d}$ и

$$AD=AE-DE=d-\frac{4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{d}=\frac{d^2-4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{d}.$$

2. Найдём $\cos\varphi$. Так как EF и AH перпендикулярны BC, то $\varphi=\angle DAH=\angle AEF$, а так как угол $\angle EAF$ опирается на диаметр, то $\cos\varphi=AE:EF=d/(2R)$.

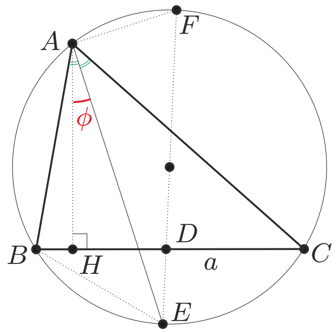

Рис. 5:

Значит

$$AH=AD\cos\varphi=\frac{d}{2R}\cdot\frac{d^2-4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{d}=\frac{d^2-4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2R}.$$

Поэтому площадь треугольника ABC равна

$$\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{a\left(d^2-4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2R}=\frac{a\left(d^2-\frac{a^2}{\sin^2\alpha}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{2a}{\sin\alpha}}=$$
$$=\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(4d^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-a^2\right).$$

Ответ: $\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(4d^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-a^2\right)$.

Ответ к варианту: *4–2*: $\frac{a^2}{2e^2}(a^2-e^2)\sin\frac{\alpha}{2}$.

5. После замены переменных $X=\sqrt{|x-1|}$, $\sqrt{3|y|}$ получаем систему:

$$\begin{cases} X+Y=1,\\ X^4+Y^4=-a,\\ X\geqslant 0,\ Y\geqslant 0.\end{cases}$$

Каждое решение (X_0,Y_0) этой системы такое, что $0<X_0<1$, $0<Y_0<1$, $X_0\neq Y_0$ порождает ровно четыре различных решения исходной системы. Поэтому или $X_0=Y_0=\frac{1}{2}$, тогда $-a=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}=\frac{1}{8}$, или $X_0=1$, $Y_0=0$ и $X_0=0$, $Y_0=1$, тогда $-a=1+0=0+1$.

Проверка. Расмотрим функцию $f(t)=t^4+(1-t)^4$. Поскольку производная равная $f'(t)=4(t^3-(1-t)^3)$ обращается в ноль только в точке $t=1/2$, то для $t\in[0;1]$ получаем оценку $\frac{1}{8}=f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f(t)\leqslant f(1)=f(0)=1$. Следовательно, при $a=-\frac{1}{8}$, возможно только одно решение системы, удовлетворяющее (X,Y), $X\geqslant 0$, $Y\geqslant 0$, а именно $(X_0,Y_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, которое порождает четыре решения исходной системы. При $a=-1$, возможно только два решения системы, удовлетворяющее (X,Y), $X\geqslant 0, Y\geqslant 0$, а именно $(X_0,Y_0)=(0,1)$, $(1,0)$ которые также порождает четыре решения исходной системы.

Ответ: $a=-1$, $a=-1/8$. Ответ к варианту: *4–2*: $a=1/2$, $a=1/16$.

*Ответы и решения к варианту **5–1** (2)*

1. Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. Так как $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}=\frac{12}{\cos 2x}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^2 2x=3\sin^2 2x\\ \sin x\neq 0, \cos x\neq 0, \cos 2x\neq 0.\end{cases}$$

Решая уравнение системы, получаем $\operatorname{tg}^2 2x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\operatorname{tg}2x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. Все найденные значения x удовлетворяют остальным условиям системы.

2. Ответ: $\frac{27}{2}$. Из уравнений $b_1q=3$, $b_1+b_1q+b_1q^2=13$, выразив b_1, получим уравнение на q: $3q^2-10q+3=0$. Его решения есть $q_1=\frac{1}{3}$, $q_2=3$, из которых подходит только $q=\frac{1}{3}$, откуда $b_1=3/q=9$. Следовательно, $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{9}{1-1/3}=\frac{27}{2}$.

3. Ответ: 12. Треугольники ABC, ACK и CBK подобны. Периметры подобных треугольников относятся так же, как соответствующие стороны. Поэтому $\frac{P_{ACK}}{P_{ABC}}=\frac{AC}{AB}$, $\frac{P_{CBK}}{P_{ABC}}=\frac{CB}{AB}$. По теореме Пифагора получаем $\frac{(AC)^2}{(AB)^2}+\frac{(CB)^2}{(AB)^2}=1$, откуда $P^2_{CBK}+P^2_{AKC}=P^2_{ABC}$. Поэтому $P_{AKC}=12$.

4. Ответ: $\frac{16}{3}$ км/час. Пусть $v(x)=kx+b$ — скорость парома в километрах в час, x — вес перевозимого груза в тоннах. Из системы $\begin{cases}k\cdot 50+b=1,1(k\cdot 60+b),\\ 6=k\cdot 70+b\end{cases}$ находим, что $k=-\frac{1}{15}$, $b=\frac{32}{3}$. Грузооборот равен $g(x)=x\cdot\left(-\frac{1}{15}\cdot x+\frac{32}{3}\right)$. Он максимален при $x=80$. Скорость в этом случае равна $\frac{16}{3}$.

5. Область определения функции задаётся условиями $\frac{x-a-b}{x+a+b}>0$, $\frac{2a-b-x}{2a-b+x}>0$, $\frac{2a-b-x}{2a-b+x}\neq 1$, которые равносильны следующим $(x-a-b)(x+a+b)>0$, $(2a-b-x)(2a-b+x)>0$, $x\neq 0$. Условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда промежуток $x^2\in\big((a+b)^2,(2a-b)^2\big)$ не пересекается с отрезком $[1,4]$. Для этого необходимо и достаточно выполнения одного из трёх условий: 1) $(a+b)^2\geqslant 4$; 2) $(2a-b)^2\leqslant 1$; 3) область определения пуста, т.е. $(a+b)^2\geqslant(2a-b)^2$.

Таким образом, ответом является множество точек (a,b), для которых либо $\left[\begin{array}{l}a+b\geqslant 2,\\ a+b\leqslant -2\end{array}\right.$ (первое условие); либо $-1\leqslant 2a-b\leqslant 1$ (второе условие); либо $a(2b-a)\geqslant 0$ (третье условие). (Всё вне полосы $|a+b|<2$ и две пары

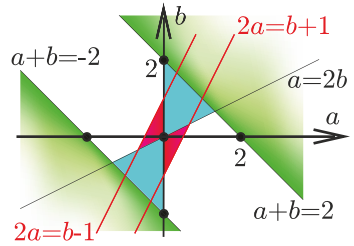

Рис. 6:

центрально-симметричных треугольников с внутренностью: пара AOB и $A'OB'$, $A(0,2)$, $O(0,0)$, $B(4/3,2/3)$, $A'(0,-2)$, $B'(-4/3,-2/3)$, и пара COD и $C'OD'$, $C(0,-1)$, $D(2/3,1/3)$, $C'(0,1)$, $D'(-2/3,-1/3)$ см. рис. 6).

*Ответы к варианту **5–2***

1. Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $m,n\in\mathbb{Z}$.

2. Ответ: $\frac{32}{3}$. Уравнение $2q^2-q-1=0$. Корни $q=-\frac{1}{2}$ (подходит), $q=1$ (не подходит). $b_1=4/q^2=16$.

3. Ответ: $P_{ABC}=5$.

4. Ответ: $\frac{10000}{99}\%$. Здесь $k=-4/99$, $b=400/99$, если единицу измерения работы взять равной 100.

5. Ответ: Объединение двух внутренностей полос, т.е. множество $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:\ |b-a|\leqslant 4,\ \text{либо}\ |2a+b|\leqslant 4$.

март 2017 г.