Задания, ответы и критерии заключительного этапа, 10-11 классы.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Заключительный этап 2015/2016 учебного года для 10–11 классов

Вариант ***171***

1. Сравните числа $(\sin 1 + \cos 1)$ и $\frac{49}{36}$. Ответ обоснуйте.

2. Два мальчика в течение нескольких часов ходили кругами вокруг здания, оба по часовой стрелке, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проходил один круг за 5 минут, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между встречами тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было не меньше 12. За какое время более медленный мальчик проходил полный круг?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x+6)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}$$

при условии $2|x|+3|y|=6$.

4. Решите уравнение

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 11\log_2([\log_3 x]) + 18\log_2(\log_3([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Боковые рёбра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Заключительный этап 2015/2016 учебного года для 10–11 классов

Вариант ***172***

1. Сравните числа $\frac{26}{19}$ и $\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$. Ответ обоснуйте.

2. Два водителя в течение нескольких часов ездили кругами по кольцевой трассе, оба против часовой стрелки, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проезжал один круг за 3 минуты, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между обгонами более медленного водителя более быстрым тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было больше 7. Каким было время между обгонами?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+6)^2}$$

при условии $2|x|+|y|=4$.

4. Решите уравнение

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 10\log_3([\log_2 x]) + 21\log_3(\log_2([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Точка D лежит на основании ABC треугольной пирамиды $SABC$ на расстоянии 5 от ребра SA, на расстоянии $2\sqrt{5}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SC. Боковые рёбра SA, SB и SC этой пирамиды взаимно перпендикулярны. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Заключительный этап 2015/2016 учебного года для 10–11 классов

*Вариант **173***

1. Определите, какое из чисел $\frac{42}{31}$ и $(\sin 1 + \cos 1)$ больше. Ответ обоснуйте.

2. Два спортсмена в течение нескольких часов бегали кругами вокруг озера, оба по часовой стрелке, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый пробегал один круг за 7 минут, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между встречами тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было не меньше 16. Каким было время между встречами?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+9)^2}$$

при условии $3|x|+|y|=6$.

4. Решите уравнение

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 8\log_2([\log_3 x]) + 15\log_2(\log_3([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Боковые рёбра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Заключительный этап 2015/2016 учебного года для 10–11 классов

*Вариант **174***

1. Определите, какое из чисел $\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$ и $\frac{40}{29}$ меньше. Ответ обоснуйте.

2. Два водителя ездили кругами по кольцевой трассе, оба против часовой стрелки, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проезжал один круг за 3 минуты, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между обгонами более медленного водителя более быстрым тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было больше 8. За какое время проезжал круг более медленный водитель?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

при условии $|x|+2|y|=2$.

4. Решите уравнение

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Точка D лежит на основании ABC треугольной пирамиды $SABC$ на расстоянии $2\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии 5 от ребра SC. Боковые рёбра SA, SB и SC этой пирамиды взаимно перпендикулярны. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–1** (Уфа)*

1. Найдите все натуральные числа x и y, удовлетворяющие уравнению $x^3 + 2y^2 = 2016$.

2. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 93, а сумма следующих 5 членов равна 2976. Найдите сумму первых 7 членов прогрессии.

3. Серединами оснований BC и AD трапеции $ABCD$ являются точки K и L соответственно. Известно, что $AD = 10 \cdot BC$. На боковых сторонах AB и CD взяты, соответственно, точки M и N, так что прямая MN параллельна основаниям трапеции. При каком значении отношения $AM : MB$ сумма площадей треугольников BKN и MNL будет наибольшей?

4. Решите неравенство

$$\sqrt{2\sin x\cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x\cos x(\sin x - \cos x).$$

5. При каких значениях a и b неравенство $b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leqslant a$ выполняется для всех действительных x?

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–2** (Уфа)*

1. Найдите все натуральные числа x и y, удовлетворяющие уравнению $8x^2 + y^3 = 2016$.

2. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 242, а сумма следующих 5 членов равна 58806. Найдите сумму первых 6 членов прогрессии.

3. Серединами оснований BC и AD трапеции $ABCD$ являются точки K и L соответственно. Известно, что $AD = 9 \cdot BC$. На боковых сторонах AB и CD взяты, соответственно, точки M и N, так что прямая MN параллельна основаниям трапеции. При каком значении отношения $AM : MB$ сумма площадей треугольников BKN и MNL будет наибольшей?

4. Решите неравенство

$$\cos^3 x + (\sin x + \cos x)\sin x\cos x + \sin^3 x < \sqrt{-\sin 2x}.$$

5. При каких значениях a и b неравенство $b \leqslant 9^{\frac{6x+3}{4x^2+4x+10}} < a$ выполняется для всех действительных x?

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **4–1** (Сочи)*

1. На соревнования по легкой атлетике ученики школы приехали на автобусе, вмещающем не более 40 человек. Каждый из них участвовал в одном из видов соревнований. При этом 1/7 часть учеников завоевали золотые медали, 1/4 часть — серебряные и еще 1/4 — бронзовые. На обратном пути медалисты решили собрать деньги и купить по одному торту каждому из спортсменов, оставшемуся без медалей. Сколько тортов им придется покупать?

2. Какие значения может принимать выражение $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$, где x_1 и x_2 — несовпадающие между собой корни уравнения $x^3-2015x+2016=0$?

3. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке M, причем $AM=4$, $AB=6$. Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали BD, если известно, что стороны AB и AD равноудалены от точки O.

4. Найдите сумму всех принадлежащих отрезку $[-75;5]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1}\geqslant \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)-\frac{x}{10}.$$

5. Укажите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2y(x-a)+a^2=0,\\ 2^{-2-y}\cdot\log_2 x<1 \end{cases}$$

имеет решения, и найдите эти решения.

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **4–2** (Сочи)*

1. На соревнования по легкой атлетике ученики школы приехали на автобусе, вмещающем не более 79 человек. Каждый из них участвовал в одном из видов соревнований. При этом 1/11 часть учеников завоевали золотые медали, 1/4 часть — серебряные и еще 1/4 — бронзовые. На обратном пути медалисты решили собрать деньги и купить по одному торту каждому из спортсменов, оставшемуся без медалей. Сколько тортов им придется покупать?

2. Какие значения может принимать выражение $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$, где x_1 и x_2 — несовпадающие между собой корни уравнения $x^3-2016x+2017=0$?

3. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, в котором диагональ AC равна 9/2, а сторона AD равна 3. Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали BD, если известно, что стороны AB и AD равноудалены от точки O.

4. Найдите сумму всех принадлежащих отрезку $[-5;65]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1}\geqslant \frac{x}{10}-\sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right).$$

5. Укажите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2y(x+a)+a^2=0,\\ 3^{-3-x}\cdot\log_3 y<1 \end{cases}$$

имеет решения, и найдите эти решения.

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–1** (Барнаул)*

1. Решите уравнение $\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x = -1$.

2. Футбольный мяч шьется из 32-х кусочков кожи: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный кусочек граничит только с белыми кусочками, каждый белый кусочек граничит с тремя черными и тремя белыми. Сколько черных кусочков нужно для изготовления мяча?

3. Решите уравнение
$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x.$$

4. На плоскости основания конуса с высотой, равной радиусу основания, дана точка (вне конуса), удалённая от окружности основания на расстояние равное двум радиусам основания. Найдите угол между касательными плоскостями к боковой поверхности конуса, проходящими через данную точку.

5. Найдите все значения a, при которых имеет единственное решение система
$$\begin{cases} (x^2+1)a = y - \cos x, \\ \sin^4 x + |y| = 1. \end{cases}$$

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **5–2** (Барнаул)*

1. Решите уравнение $(1 - \log_2 x) \cdot \sqrt{\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x}} = 1$.

2. Футбольный мяч шьется из 32-х кусочков кожи: черных шестиугольников и белых пятиугольников. Каждый белый кусочек граничит только с черными кусочками, каждый черный кусочек граничит с тремя черными и тремя белыми. Сколько черных кусочков нужно для изготовления мяча?

3. Решите уравнение
$$((\cos x + \sin x)^2 + 28 - \sin 2x) \cos^4 2x = 16 \cos^{10} x + 16 \sin^{10} x.$$

4. На плоскости основания конуса с высотой, равной двум радиусам основания, дана точка (вне конуса), удалённая от окружности основания на расстояние равное радиусу основания. Найдите угол между касательными плоскостями к боковой поверхности конуса, проходящими через данную точку.

5. Найдите все значения a, при которых имеет единственное решение система
$$\begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x, \\ \sin^4 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

март 2016 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–1** (Саратов)*

1. В десятичной записи натурального числа, состоящей только из цифр 4 и 5, количество цифр 5 нечётно и на 17 больше количества цифр 4. Найдите все возможные остатки от деления этого числа на 9.

2. Решите уравнение

$$x+\log_2 x-\log_3 x+\log_4 x-7=\left(\frac{3}{4}-\log_3\sqrt{2}\right)\cdot\log_2 49.$$

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно. При этом $AM:MB=3:1$, $CN:NB=1:7$. Какой процент от площади четырёхугольника $AMNC$ составляет площадь треугольника MBN?

4. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2}\sin 3x+\sqrt{2+\cos 3x}\right)\left(2\cos(\sqrt{2}\arcsin x)-1\right)=0.$$

5. Найдите количество точек на координатной плоскости, через которые проходит как кривая $(4x^3-3x)^{15}=1-(4y^3-3y)^{16}$, так и кривая $x^2=1-y^2$.

март 2016 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–2** (Саратов)*

1. В десятичной записи натурального числа, состоящей только из цифр 2 и 7, количество цифр 7 нечётно и на 29 больше количества цифр 2. Найдите все возможные остатки от деления этого числа на 9.

2. Решите уравнение

$$\log_2 x-\log_3 x+\log_4 x-5=\left(\frac{1}{2}-\log_3\sqrt[3]{2}\right)\cdot\log_2 125-x.$$

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно. При этом $AM:MB=1:3$, $CN:BN=4:9$. Какой процент от площади четырёхугольника $AMNC$ составляет площадь треугольника MBN?

4. Решите уравнение

$$\left(2\sin(\sqrt{3}\arcsin x)-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\sin 3x+\sqrt{2+\cos 3x}\right)=0.$$

5. Найдите количество точек на координатной плоскости, через которые проходит как кривая $(3x-4x^3)^{13}=1-(4y^3-3y)^{18}$, так и кривая $x^2=1-y^2$.

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **7–1** (Йошкар-Ола)*

1. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}$$

при $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{7}{3}$.

2. Решите неравенство

$$\log_{3x}(x+1)-(x+1)^{(\log_{\cos 5}\sqrt{x+1})^{-1}}<\sin^2 5.$$

3. Для бригады маляров-учеников была запланирована окраска 360 кв.м. стен. Перед началом работы один из учеников заболел и вместо него работал мастер, производительность которого в 3 раза больше производительности каждого из учеников. Поэтому каждый из учеников в действительности покрасил на 6 кв.м. меньше чем планировалось. Все ученики и мастер работали одинаковое время. Сколько учеников работало?

4. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\operatorname{arctg} 3$. В каком отношении делит боковую сторону SB сфера, центр которой лежит в плоскости основания, если известно, что вершины основания принадлежат сфере?

5. Найдите сумму первых ста положительных корней уравнения:

$$\cos(8\pi x)+2\cos(4\pi x)-\cos(2\pi x)+2\sin(\pi x)+3=0.$$

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **7–2** (Йошкар-Ола)*

1. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x+1}{x^2+2xy+y^2}-\frac{1}{x^2-y^2}\right)\cdot\frac{(x-y)^2}{x^2-2y-xy}+\frac{y-x}{(x-y)^2}$$

при $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{8}{3}$.

2. Решите неравенство

$$(1-x)^{(\log_{\sin 7}\sqrt{1-x})^{-1}}>\log_{(-3x)}(1-x)-\cos^2 7.$$

3. Для бригады маляров-учеников была запланирована окраска 420 кв.м. стен. Перед началом работы один из учеников заболел и вместо него работал мастер, производительность которого в 3 раза больше производительности каждого из учеников. Поэтому каждый из учеников в действительности покрасил на 5 кв.м. меньше чем планировалось. Все ученики и мастер работали одинаковое время. Сколько учеников работало?

4. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен $\operatorname{arctg} 5$. В каком отношении делит боковую сторону SB сфера, центр которой лежит в плоскости основания, если известно, что вершины основания принадлежат сфере?

5. Найдите сумму первых ста положительных корней уравнения:

$$\cos(8\pi x)+2\cos(4\pi x)-\cos(2\pi x)-2\sin(\pi x)+3=0.$$

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***17-1*** *(Москва)*

1. Сравните числа $(\sin 1 + \cos 1)$ и $\frac{49}{36}$. Ответ обоснуйте.

2. Два мальчика в течение нескольких часов ходили кругами вокруг здания, оба по часовой стрелке, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проходил один круг за 5 минут, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между встречами тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было не меньше 12. За какое время более медленный мальчик проходил полный круг?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x+6)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}$$

при условии $2|x|+3|y|=6$.

4. Решите уравнение

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 11\log_2([\log_3 x]) + 18\log_2(\log_3([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Боковые рёбра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***17-2*** *(Москва)*

1. Сравните числа $\frac{26}{19}$ и $\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$. Ответ обоснуйте.

2. Два водителя в течение нескольких часов ездили кругами по кольцевой трассе, оба против часовой стрелки, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проезжал один круг за 3 минуты, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между обгонами более медленного водителя более быстрым тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было больше 7. Каким было время между обгонами?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+6)^2}$$

при условии $2|x|+|y|=4$.

4. Решите уравнение

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 10\log_3([\log_2 x]) + 21\log_3(\log_2([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Точка D лежит на основании ABC треугольной пирамиды $SABC$ на расстоянии 5 от ребра SA, на расстоянии $2\sqrt{5}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SC. Боковые рёбра SA, SB и SC этой пирамиды взаимно перпендикулярны. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***17-3*** *(Москва)*

1. Определите, какое из чисел $\frac{42}{31}$ и $(\sin 1 + \cos 1)$ больше. Ответ обоснуйте.

2. Два спортсмена в течение нескольких часов бегали кругами вокруг озера, оба по часовой стрелке, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый пробегал один круг за 7 минут, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между встречами тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было не меньше 16. Каким было время между встречами?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+9)^2}$$

при условии $3|x|+|y|=6$.

4. Решите уравнение

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 8\log_2([\log_3 x]) + 15\log_2(\log_3([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Боковые рёбра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***17-4*** *(Москва)*

1. Определите, какое из чисел $\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)$ и $\frac{40}{29}$ меньше. Ответ обоснуйте.

2. Два водителя ездили кругами по кольцевой трассе, оба против часовой стрелки, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проезжал один круг за 3 минуты, а более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между обгонами более медленного водителя более быстрым тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было больше 8. За какое время проезжал круг более медленный водитель?

3. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

при условии $|x|+2|y|=2$.

4. Решите уравнение

$$[\log_3(\log_2 x)]^2 - 12\log_3([\log_2 x]) + 20\log_3(\log_2([x])) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Точка D лежит на основании ABC треугольной пирамиды $SABC$ на расстоянии $2\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии 5 от ребра SC. Боковые рёбра SA, SB и SC этой пирамиды взаимно перпендикулярны. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

март 2016 г.

ПВГ – 2016. МАТЕМАТИКА. Предложения по критериям проверки

Вариант 3

Задача № 1 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
При правильных рассуждениях один из корней найден неправильно или не найден.	$\pm$	15
Подобраны оба корня, но не доказано, что других решений нет.	$\mp$	5

Задача № 2 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Верно найдена прогрессия, неверно вычислена искомая сумма.	$\pm$	15
Верно выписана система уравнений, соответствующая условию задачи.	$\mp$	5

Задача № 3 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Верно найдена функция, задающая зависимость суммы площадей от соответствующего отношения, далее допущена арифметическая ошибка при идейно правильном анализе.	$\pm$	15
Верно найдена зависимость площади одного из треугольников от соответствующего отношения.	$\mp$	5

Задача № 4 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Решение отличается от правильного на одну точку на периоде.	$\pm$	15
Неравенство правильно сведено к совокупности систем простейших тригонометрических неравенств.	$\mp$	5

Задача № 5 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Область значений показательной функции найдена правильно.	$\pm$	15
Область значений показательной функции исследовалась правильно с точностью до арифметических ошибок.	$\mp$	5

ПВГ – 2016. МАТЕМАТИКА. Предложения по критериям проверки

Вариант 4

Задача № 1 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
При правильном решении неверно посчитано количество всех спортсменов, либо в ответе указано количество призеров.	$\pm$	15
Найдено решение без каких либо обоснований.	$\mp$	5

Задача № 2 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Арифметическая ошибка при правильном рассуждении.	$\pm$	15
Либо выписано теорема Виета, либо составлена система на нахождение корней, но существенного дальнейшего продвижения нет.	$\mp$	5

Задача № 3 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Арифметическая ошибка при идейно правильном решении.	$\pm$	15
Правильно найдена длина отрезка МС.	$\mp$	5

Задача № 4 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Неверно найдена сумма чисел на отрезке, при этом сами числа найдены верно.	$\pm$	15
Верно решено тригонометрическое неравенство. Отбор корней из отрезка не произведен, либо сделан неверно.	$\mp$	5

Задача № 5 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
При правильном и обоснованном решении ответ либо неправильный из-за арифметической ошибки, либо дополняет правильный до ОДЗ параметра.	$\pm$	15
Верно решено уравнение в системе.	$\mp$	5

ПВГ – 2016. МАТЕМАТИКА. Предложения по критериям проверки

Вариант 5

Задача № 1 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Равносильными преобразованиями исходное уравнение сведено к простейшим логарифмическим уравнениям, в дальнейшем допущены арифметические ошибки.	$\pm$	15
Равносильными преобразованиями исходное уравнение сведено к квадратному уравнению.	$\mp$	5

Задача № 2 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Решение идейно верное, допущены арифметические ошибки.	$\pm$	15
Правильный ответ получен в результате ошибочных или недостаточно обоснованных рассуждений.	$\mp$	5

Задача № 3 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Задача правильно сведена к простейшим тригонометрическим уравнениям.	$\pm$	15
Задача правильно сведена к квадратному уравнению.	$\mp$	5

Задача № 4 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
В том или ином виде получена верная формула (уравнение) для тригонометрической функции искомого угла, далее допущена ошибка.	$\pm$	15
Стереометрическая задача в правильном направлении сведена к планиметрической(-ким).	$\mp$	5

Задача № 5 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
При наличии идейно верных обоснований необходимости и достаточности, решение найдено неверно из-за ошибок в выкладках.	$\pm$	15
Обосновано наличие конечного числа возможных значений параметра, включая верное. Достаточность не проверялась.	$\mp$	5

ПВГ – 2016. МАТЕМАТИКА. Предложения по критериям проверки

Вариант 6

Задача № 1 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Арифметическая ошибка при правильном рассуждении.	$\pm$	15
Указано условие равноостаточности при делении на 9.	$\mp$	5

Задача № 2 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Арифметическая ошибка при правильном рассуждении.	$\pm$	15
Найдено решение без обоснования.	$\mp$	5

Задача № 3 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Арифметическая ошибка при идейно правильном решении.	$\pm$	15
Найдено отношение площади треугольника MNB либо к площади треугольника ABC, либо к площади четырёхугольника.	$\mp$	5

Задача № 4 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Решено каждое уравнение по отдельности, не учтена общая ОДЗ. Либо в идейно правильном решении присутствует арифметическая ошибка.	$\pm$	15
Верно решено только одно уравнение.	$\mp$	5

Задача № 5 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Задача решалась идейно верно, но либо выписаны не все пары решений, либо есть лишние пары.	$\pm$	15
Угадано три решения и более.	$\mp$	5

ПВГ – 2016. МАТЕМАТИКА. Предложения по критериям проверки

Вариант 7

Задача № 1 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Исходное выражение упрощено верно, далее допущена арифметическая ошибка.	±	15
Арифметическая ошибка при упрощении исходного выражения.	∓	5

Задача № 2 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Неравенство равносильными преобразованиями сведено к рациональным неравенствам, далее допущена арифметическая ошибка.	±	15
Неравенство равносильными преобразованиями сведено к простейшему логарифмическому.	∓	5

Задача № 3 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
При идейно правильном решении получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	±	15
Задача правильно сведена к алгебраической системе.	∓	5

Задача № 4 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
В том или ином виде получена верная формула (уравнение), задающая искомое отношение, далее допущена ошибка.	±	15
Стереометрическая задача в правильном направлении сведена к планиметрической(ким).	∓	5

Задача № 5 = 20 баллов	**Плюсы-минусы**	**Балл**
Правильно решено исходное уравнение.	±	15
Задача правильно сведена к системе простейших тригонометрических уравнений.	∓	5

ПВГ – 2016. МАТЕМАТИКА. Предложения по критериям проверки

Вариант 17

Задача № 1 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Решение идейно верное, на последнем шаге допущена арифметическая ошибка.	$\pm$	15
Возможность замены аргумента тригонометрических функций табличным значением никак не объяснено (нет слов о монотонности).	$\mp$	5

Задача № 2 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Решение идейно верное, допущены арифметические ошибки.	$\pm$	15
Правильный ответ получен в результате ошибочных или недостаточно обоснованных рассуждений. В частности, упущен ряд значений искомой величины.	$\mp$	5

Задача № 3 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Решение идейно верное, допущены арифметические ошибки.	$\pm$	15
Задача правильно сведена к исследованию геометрической модели, но дальнейшее решение содержит существенные ошибки или не завершено.	$\mp$	5

Задача № 4 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
Решение идейно верное, допущены арифметические ошибки.	$\pm$	15
Доказано неравенство, связывающее повторные логарифмы с целой частью (см. прилагаемое решение), но дальнейшее решение содержит существенные ошибки или не завершено. Или только лишь показано, что все значения из верного ответа удовлетворяют уравнению.	$\mp$	5

Задача № 5 = 20 баллов	**Оценка**	**Балл**
При наличии идейно верных обоснований необходимости и достаточности, решение найдено неверно из-за ошибок в выкладках.	$\pm$	15
Верно найдены координаты точки *D*. Дальнейшее решение содержит существенные ошибки или не завершено.	$\mp$	5