Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 7-8 класса

1. В ряд стоят 8 чисел так, что сумма каждых трех чисел, стоящих подряд, равняется 50. Известны первое и последнее число из этих восьми. Заполните шесть пустых мест:

11 _ _ _ _ _ _ 12.

ОТВЕТ: 11,12,27,11,12,27,11,12

Решение: Из условия вытекает, что последовательность чисел является периодической с периодом 3.

2. Можете ли вы с помощью четырех арифметических действий (также можно использовать скобки) записать число 2016, используя последовательно цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

ОТВЕТ: $1\cdot 2\cdot 3\cdot (4+5)\cdot 6\cdot 7\cdot 8:9=2016$

3. В тесте 4 раздела, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Андрей правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 60, но меньше 70. Сколько вопросов было в тесте?

ОТВЕТ: 32.

Решение. По условию $\frac{60}{100}<\frac{20}{x}<\frac{70}{100}$, отсюда $28\frac{4}{7}=\frac{200}{7}<x<\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$, то есть $29\le x\le 33$. Из первого условия задачи следует, что число вопросов должно делиться на 4.

4. Найдите все 4-значные числа, которые на 7182 меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

ОТВЕТ: 1909

Решение. Запишем искомое число в виде $\overline{abcd}$

Тогда $\overline{abcd}=\overline{dcba}-7182$, откуда 111(*d*-*a*)+10(*c*-*b*)=798.

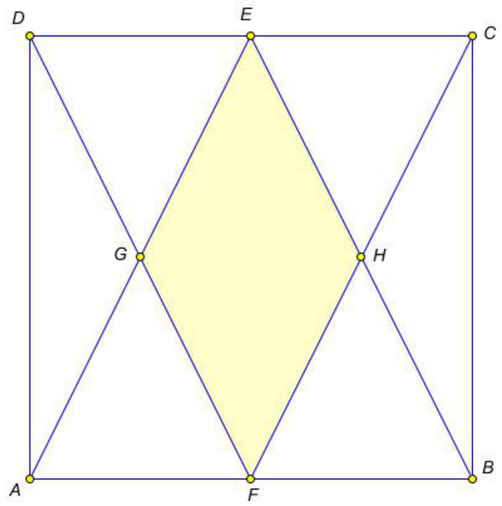
Очевидно, (*d*-*a*) может быть равно только 7 или 8.

В случае *d*-*a*=7 получим 10(*c*-*b*)=21 – не подходит.

В случае *d*-*a*=8 получим 10(*c*-*b*) = -90, следовательно, *b*-*c*=9, откуда *b*=9, *c*=0.

Равенство d-a=8 возможно при d=8, a=0 или d=9, a=1, но первая цифра не может быть равна нулю, следовательно, a=1, b=9, c=0, d=9.

5. В квадрате *ABCD* точки *F* и *E* – середины сторон *AB* и *CD*, соответственно . Точку *E* соединили с вершинами *A* и *B*, а точку *F* – с *C* и *D*, как показано на рисунке. Определите площадь ромба *FGEH*, образовавшегося в центре, если известна сторона квадрата *AB*=4



Ответ 4.

Решение – квадрат можно разрезать на кусочки и сложить еще 3 таких ромба, т.е. ромб составляет ¼ от площади квадрата.

6. Сколько существует различных прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{2016}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

ОТВЕТ: 12.

Решение. По условию $c^2-b^2=a^2=2016$, то есть $(c-b)(c+b)=2^5\cdot 3^2\cdot 7$. Система $\begin{cases} c-b=n, \\ c+b=k \end{cases}$ (здесь n – один из делителей числа 2016, а $k=\frac{2016}{n}$) имеет натуральные решения $c=\frac{n+k}{2}$, $b=\frac{k-n}{2}$, если $n<k$ (то есть $n\le 44$) и n и k – четные.

Возможные значения n: 2, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2\cdot 3=6$, $2^2\cdot 3=12$, $2^3\cdot 3=24$, $2\cdot 7=14$, $2^2\cdot 7=28$, $2\cdot 3^2=18$, $2^2\cdot 3^2=36$, $2\cdot 3\cdot 7=21$ – всего 12 вариантов.

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 7-8 класса

1. В ряд через запятую стоят 8 чисел так, что сумма каждых трех чисел, стоящих подряд, равняется 100. Известны первое и последнее число из этих восьми. Заполните шесть пустых мест:

   20, _ ,_, _, _, _, _, 16.

   ОТВЕТ: 20,16,64,20,16,64,20,16

   Решение: Из условия вытекает, что последовательность чисел является периодической с периодом 3.

2. Расставьте знаки арифметических выражений и скобки в выражении, состоящем из трех чисел, $\frac{1}{8} \ldots \frac{1}{9} \ldots \frac{1}{28}$, так, чтобы результат вычислений был равен $\frac{1}{2016}$.

   ОТВЕТ: $\frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{28}$ или $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) \times \frac{1}{28}$

   Решение: разложить 2016 на простые множители и заметить, что 2016=8x9x28.

3. В тесте 5 разделов, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Павел правильно ответил на 32 вопроса. При этом процент его верных ответов оказался больше 70, но меньше 77. Сколько вопросов было в тесте?

   ОТВЕТ: 45.

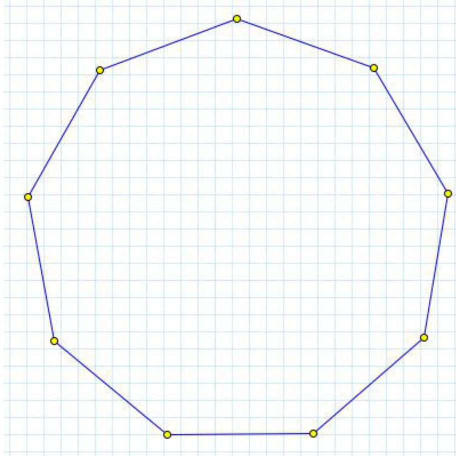
   Решение: из условия $0.7 < 32/x < 0.77$ вытекает, что $41<x<46$, но x кратно 5, поэтому $x=45$.

4. Найдите все 4-значные числа, которые на 8802 меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

   ОТВЕТ: 1099

   Решение: Заметим, что $x+8802 < 10000$, следовательно, $x< 1198$, поэтому первая цифра равна 1, а вторая – 0 или 1. Сумма $x+8802$ оканчивается на 1, поэтому последняя цифра 9. Получаем число вида 10a9 или 11a9, получаем уравнение вида 10a9+8802=9a01 или 11a9+8802=9a11. Первое дает решение a=9, второе – решения не имеет.

5. В вершинах правильного 9-угольника (см. рис.) расставьте числа 2016, 2017, …, 2024, таким образом, чтобы для любых трех вершин, образующих правильный треугольник одно из чисел было равно среднему арифметическому двух других.



ОТВЕТ: расставить числа подряд (возможны и другие варианты).

Решение: заметить, что любые три числа, идущие через равные промежутки, подходят.

6. Сколько существует различных прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{1001}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

ОТВЕТ: 4.

Решение: запишем теорему Пифагора: a^2+1001=b^2. Отсюда получим (b - a)(b+a)=1001=7x11x13. Можно представить 1001 как произвденеи двух множителей 1x1001=7x143=11x91=13x77 – первый множитель должен быть меньше – всего 4 варианта.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 7-8 класса

1. Целое число увеличили на 2, при этом его квадрат уменьшился на 2016. Каким число было в начале (до увеличения)?
   ОТВЕТ: -505.
   Решение: Решим уравнение $(x+2)^2=x^2-2016$.
2. Знайка сказал Незнайке, что для того, чтобы перевести килолуны в килограммы нужно разделить массу в килолунах на 4 и полученное число уменьшить на 4%. Незнайка решил, что для перевода из килограммов в килолуны нужно массу в килограммах умножить на 4 и полученное число увеличить на 4%. На сколько процентов от правильного значения массы в килолунах он ошибётся, если будет так переводить?
   ОТВЕТ: на 0,16%.
   Решение: Один килолун составляет 0.25*0.96 = 0.24 кг. Следовательно, в одном килограмме 25/6 килолунов. Если Незнайка будет переводить 1 кг, то получит 4*1.04 = 4.16, что составляет 99,84% от 25/6.
3. Маленький огород размером 6х7 метров разбили на 5 квадратных грядок. Все мёжи (прямые, разделяющие грядки) проходят параллельно сторонам квадрата, сторона каждой грядки составляет целое число метров. Найдите суммарную длину получившихся мёж.
   ОТВЕТ: 15м.
   Решение: 42 можно разбить на 5 квадратов только одним способом: $42=4^2+3^2+3^2+2^2+2^2$. Их суммарный периметр равен 4*4+4*3+4*3+4*2+4*2 = 56. Но надо отнять внешние границы, их длина 6+6+7+7=26, а также учесть, что каждая межа участвует в периметре двух квадратов – поэтому надо поделить на 2.
4. Найдите наибольшее натуральное число, которое невозможно представить в виде суммы двух составных чисел.
   ОТВЕТ: 11
   Решение: Четные числа, большие 8 можно представить как сумму двух четных чисел, больших 2. А нечетные числа, большие 12 можно представить как сумму

9 и четного составного числа. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что 11 так представить нельзя.

5. Решите уравнение $\frac{\sqrt{(-x)^2}+\left(\sqrt{-x}\right)^2}{x^2+(-x)^2}=\frac{1}{2016}$

ОТВЕТ:x=-2016.

Решение: Заметим, что x<0 из ОДЗ, представим уравнение как $\frac{-2x}{2x^2}=\frac{1}{2016}$.

6. Сколько существует пятизначных чисел вида $\overline{ab16c}$, кратных 16? (*a,b,c* – произвольные цифры, не обязательно разные).

ОТВЕТ: 90.

Решение: Заметим, что первая цифра не влияет на делимость, следовательно, a=1,…,9. С Другой стороны, из делимости на 8 вытекает, что c=0 или 8. Если c=0, то b должно быть четным, а при c=8 – нечетным. В обоих случаях получаем по 5 вариантов, откуда общее количество 9*(5+5) = 90.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 7-8 класса

1. Целое число уменьшили на 3, при этом его квадрат увеличился на 2015. Каким число было в начале (до уменьшения)?
ОТВЕТ: Таких чисел (целых) не существует.
2. Мудрый Гендальф сказал Фродо, что для того, чтобы перевести эльфийские мили в обычные нужно разделить расстояние в эльфийских милях на 5 и полученное число уменьшить на 5%. Фродо решил, что для перевода из человеческих миль в эльфийские нужно расстояние в обычных милях умножить на 5 и полученное число увеличить на 5%. На сколько процентов от правильного значения расстояния в эльфийских милях он ошибётся, если будет так переводить?
ОТВЕТ: на 0.25% (решение – см. v2a).
3. Прямоугольник размером 7х6 дм. разрезали на 5 квадратов. Все разрезы проходят параллельно сторонам исходного прямоугольника, все квадраты имеют целые размеры в дм. Найдите суммарную длину сделанных разрезов.
ОТВЕТ: 15 дм. (решение – см. v2a).
4. Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?
ОТВЕТ: 208.
Решение. Если искомое число *x*, то число $x+2$ должно делиться на 3, 5 и 7, т. е. имеет вид $3\cdot5\cdot7\cdot p$. Значит, $x=105p-2$. Так как по условию $150<x\le300$, то $p=2$. Поэтому $x=208$.
5. Решите уравнение $\left(\sqrt{x}\right)^{2016}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2016}=1$
ОТВЕТ: *x* = 0 или 1.
Решение: Из ОДЗ 0<=x<=1. Видно, что 0 и 1 подходят. Если же 0<x<1, то $\left(\sqrt{x}\right)^{2016}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2016}<x+(1-x)=1$, и не может быть решением.

6. Найдите все натуральные числа, которые в 36 раз больше суммы своих цифр.

ОТВЕТ: 324; 648.

Решение. Обозначим через $S(x)$ сумму цифр числа *x*. Тогда уравнение $x = 36 \cdot S(x)$ не имеет решений при $n \geq 5$, так как $x \geq 10^{n-1}$, а $36 \cdot S(x) \leq 36 \cdot 9 \cdot n = 324n < 10^3 \cdot n$. При $n = 4$ решений тоже нет, так как (здесь *a*, *b*, *c*, *d* – цифры числа):

$$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d > 36(a+b+c+d) \Leftrightarrow 964a + 64b > 26 \cdot 9 + 35 \cdot 9 \geq 26c + 35d.$$

При $n = 3$: $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 36(a+b+c) \Leftrightarrow 64a = 26b + 35c$. После этого перебор. В результате получаются числа 324 и 648.

При $n = 2$: $a \cdot 10 + b = 36(a+b) \Leftrightarrow 26a = 35b$ – решений нет

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 7-8 класса

1. Найдите наименьшее натуральное N, такое, то N+2 делится (без остатка) на 2, N+3 – на 3, …, N+10 – на 10.

Найдите наименьшее натуральное N, такое, то N+2 делится (без остатка) на 2, N+3 – на 3, …, N+10 – на 10.

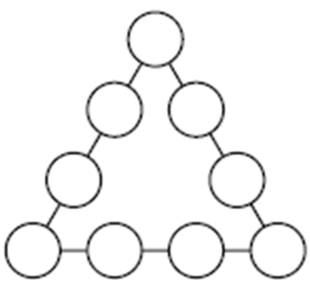
ОТВЕТ:2520.

2. Пятеро бегунов бежали эстафету. Если бы первый бежал в два раза быстрее, то они бы потратили на 5% меньше времени. Если бы второй бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы третий бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 12% меньше времени. Если бы четвертый бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 15% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый бежал в два раза быстрее?

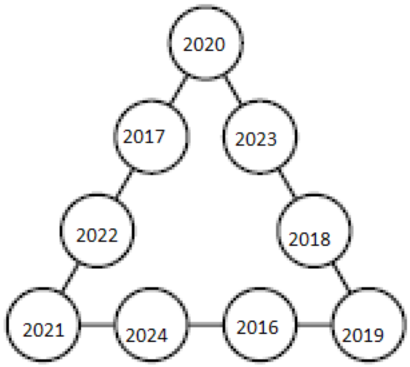
ОТВЕТ: на 8%

Решение: Если бы каждый бежал в два раза быстрее, то они пробежали бы быстрее на 50%. Значит, если бы 5-й бежал быстрее, то время уменьшилось бы на 50-5-10-12-15 = 8%.

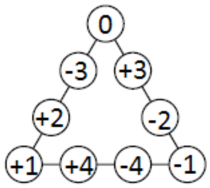
3. Можно ли расставить числа 2016, 2017, …, 2024 на указанные позиции (см. рис.), так, чтобы сумма чисел стоящих на каждой стороне треугольника была одинаковой?



ОТВЕТ: Да, можно, см. рис.

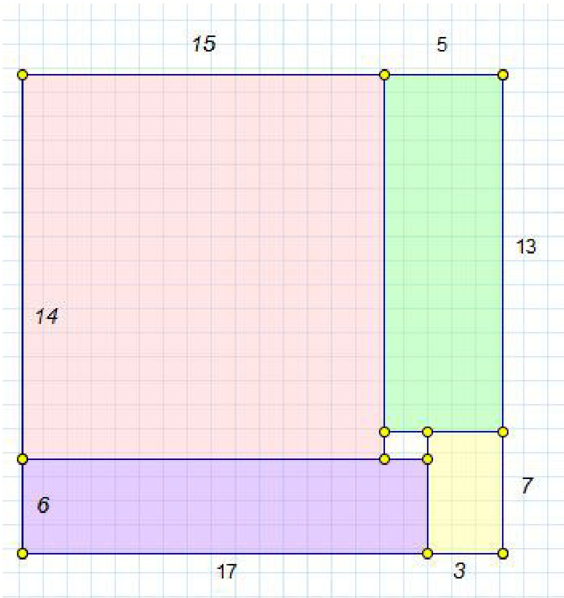


Решение: Сначала поставим во всех точках среднее значение 2020. Потом расставим 0,+/-1, +/-2, +/-3, +/-4, так, чтобы сумма на каждой стороне была равна 0 (см. рис). Возможны и другие варианты расстановки.



4. Дан квадрат 1x1. Разрежьте его на 5 прямоугольников, так, чтобы все 10 чисел, соответствующие ширине и высоте каждого прямоугольника были различными рациональными числами.

ОТВЕТ: Возьмем квадрат 20x20, разрежем на прямоугольники с целыми сторонами (см.рис.), потом уменьшим все стороны в 20раз. Возможны и другие варианты решения



5. Найдите количество 10-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 87.

ОТВЕТ: 8999999934.

Решение: Всего существует 9000000000 10-значных чисел. Найдем все числа, которые не подходят, т.е. сумма цифр которых больше 87. Запишем число из одних девяток, его сумма цифр равна 90. Если одну из девяток заменить на 7 или 8, то сумма цифр останется больше 87, таких вариантов 10+10=20. Также можно заменить две девятки на восьмерки – таких вариантов 10*9/2 = 45. Всего получим 45+20+1=66 чисел, котрые не подходят. Значит остальные 8999999934 подходят.

6. Найдите наименьшее натуральное число N, такое, что число $99N$ состоит из одних троек.

ОТВЕТ: 3367.

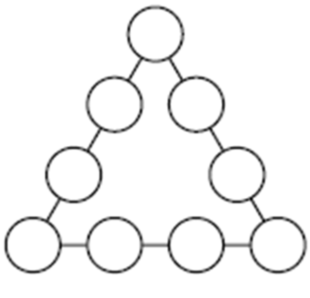
Решение. Число 33N должно состоять из одних единиц. Число делится на 33, если оно делится на 3 и на 11. Число состоящее из одних единиц делится на 3, если число единиц кратно 3 и делится на 11, если число единиц кратно 2. Наименьшее такое число – 111111, значит 33N = 111111, откуда N=3367.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 7-8 класса

1. Найдите наименьшее натуральное N, такое, то N делится (без остатка) на 12, N+2 – на 14, N+4 – на 16, а N+6 – на 18.
2. Папа, мама, дедушка, бабушка и маленький Алёша сажали картофель. Если бы папа сажал картофель в два раза быстрее, то они бы потратили на 18% меньше времени на посадку. Если бы мама сажала в два раза быстрее, то они потратили бы на 12% меньше времени. Если бы дедушка сажал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы бабушка сажала в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы Алеша сажал картофель в два раза быстрее?
3. Можно ли расставить числа 2020, 2021, …, 2028 на указанные позиции (см. рис.), так, чтобы сумма чисел стоящих на каждой стороне треугольника была одинаковой?



4. Найдите 5 прямоугольников, из которых можно сложить квадрат размера 15x15, причем таких, что все 10 чисел, соответствующие ширине и высоте каждого прямоугольника являются различными целыми числами.
5. Найдите количество 20-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 177.
6. Найдите наименьшее натуральное число N, такое, что число 99N состоит из одних единиц.

2015/2016 учебный год
КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»
по математике
5-9 классы

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:
*От **100** баллов включительно.*

ПРИЗЁР:
*От **85** баллов до **99** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (дипломант I степени):
*От **100** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (дипломант II степени):
*От **90** баллов до **99** баллов включительно.*

---

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике*